数学演習（接線の方程式）Ｈ２２．１０．２８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．(1)　曲線 $y=x^3$ 上の点 $(2,\ 8)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^3+x$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

2．放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 $(1,\ 1)$ を通り，点 $(2,\ 3)$ において直線 $y=4x-5$ に接するように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

3．曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ は，点 $\mathrm{A}\,(0,\ 1)$ において直線 $y=x+1$ に，点 $\mathrm{B}\,(3,\ 4)$ において直線 $y=-2x+10$ にそれぞれ接する。このとき，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

4．(1)　曲線 $y=x^3-x^2-2x$ 上の点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^3+x+2$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線に垂直な直線 (法線) の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=x^3+3x^2$ に接し，傾きが 9 である直線の方程式を求めよ。

5．次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+4$　$(0,\ 0)$

(2)　$y=-x^2+x-3$　$(1,\ 1)$

(3)　$y=x^3+4$　$(0,\ -12)$

6．次の接線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(3,\ 4)$ から放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線

(2)　曲線 $y=x^3-3x^2-1$ の接線で，原点を通るもの

7．次の関数の極値を求め，グラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x^2-9x+11$

(2)　$y=(x-1)^2(x+2)$

(3)　$y=-2x^3+12x^2-18x$

数学演習（接線の方程式）Ｈ２２．１０．２８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．(1)　曲線 $y=x^3$ 上の点 $(2,\ 8)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^3+x$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=12x-16$　　(2)　$y=-2x+2,\ y=-2x-2$

解説

(1)　$f(x)=x^3$ とすると

$f'(x)=3x^2$

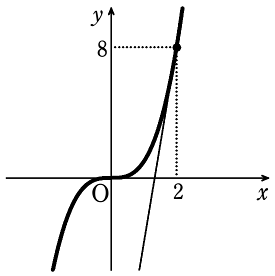
点 $(2,\ 8)$ における接線の傾きは

$f'(2)=3\cdot 2^2=12$

よって，求める接線の方程式は

$y-8=12(x-2)$

すなわち　$y=12x-16$



(2)　$f(x)=-x^3+x$ とすると

$f'(x)=-3x^2+1$

点$(a,\ -a^3+a)$ における接線の方程式は

$y-(-a^3+a)=(-3a^2+1)(x-a)$　……①

この直線の傾きが -2 であるとすると

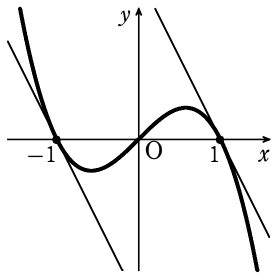
$-3a^2+1=-2$

ゆえに　$a^2=1$　　よって　$a=\pm 1$

① から　$a=1$　のとき　$y=-2(x-1)$

$a=-1$　のとき　$y=-2(x+1)$

したがって　$y=-2x+2,\ y=-2x-2$



２．放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 $(1,\ 1)$ を通り，点 $(2,\ 3)$ において直線 $y=4x-5$ に接するように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

解答　$a=2,\ b=-4,\ c=3$

解説

放物線 $y=ax^2+bx+c$ が，２点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通るための条件は

$a+b+c=1$　……①

$4a+2b+c=3$　……②

また，点 $(2,\ 3)$ における接線の傾きが 4 であるための条件は，$y'=2ax+b$ であるから x に2 を代入すると

$4a+b=4$　……③

連立方程式 ①，②，③ を解いて　$a=2,\ b=-4,\ c=3$

３．曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ は，点 A $(0,\ 1)$ において直線 $y=x+1$ に，点 B $(3,\ 4)$ において直線 $y=-2x+10$ にそれぞれ接する。このとき，定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

解答　$a=-\dfrac{1}{3},\ b=c=d=1$

解説

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

曲線 $y=f(x)$ が A $(0,\ 1)$ において直線 $y=x+1$ に接するから

$f(0)=1,\ f'(0)=1$

曲線 $y=f(x)$ が B $(3,\ 4)$ において直線 $y=-2x+10$ に接するから

$f(3)=4,\ f'(3)=-2$

$f(0)=1$ から　$d=1$

$f'(0)=1$ から　$c=1$

$f(3)=4$ から　$27a+9b+3c+d=4$

$f'(3)=-2$ から　$27a+6b+c=-2$

これを解いて　$a=-\dfrac{1}{3},\ b=c=d=1$

４．(1)　曲線 $y=x^3-x^2-2x$ 上の点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^3+x+2$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線に垂直な直線（法線）の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=x^3+3x^2$ に接し，傾きが 9 である直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=19x-45$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$　　(3)　$y=9x-5,\ y=9x+27$

解説

(1)　$f(x)=x^3-x^2-2x$ とすると　$f'(x)=3x^2-2x-2$

ゆえに　$f'(3)=3\cdot 3^2-2\cdot 3-2=19$

よって，点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式は

$y-12=19(x-3)$　すなわち　$y=19x-45$

(2)　$f(x)=-x^3+x+2$ とすると　$f'(x)=-3x^2+1$

よって，点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは　$f'(1)=-3\cdot 1^2+1=-2$

点 $(1,\ 2)$ における接線に垂直な直線の傾きを m とすると

接線の傾きが-2，求める直線の傾きがmであるから，２つの傾きを掛けると-1より

$-2m=-1$

よって　$m=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める直線の方程式は

$y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

(3)　$f(x)=x^3+3x^2$ とすると　$f'(x)=3x^2+6x$

点 $(a,\ a^3+3a^2)$ における接線の方程式は　$y-(a^3+3a^2)=(3a^2+6a)(x-a)$

すなわち　$y=(3a^2+6a)x-2a^3-3a^2$　……①

この直線の傾きが 9 であるとすると　$3a^2+6a=9$

整理して　$a^2+2a-3=0$　　ゆえに　$(a-1)(a+3)=0$

したがって　$a=1,\ -3$

① から　$a=1$ のとき　$y=9x-5$，　$a=-3$ のとき　$y=9x+27$

よって，求める直線の方程式は　$y=9x-5,\ y=9x+27$

５．次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+4$　$(0,\ 0)$　　　(2)　$y=-x^2+x-3$　$(1,\ 1)$

(3)　$y=x^3+4$　　$(0,\ -12)$

解答　順に　(1)　$y=-7x$，$(-2,\ 14)$；$y=x$，$(2,\ 2)$

(2)　$y=3x-2$，$(-1,\ -5)$；$y=-5x+6$，$(3,\ -9)$

(3)　$y=12x-12$，$(2,\ 12)$

解説

(1)　$y'=2x-3$

接点の座標を $(a,\ a^2-3a+4)$ とすると，接線の方程式は

$y-(a^2-3a+4)=(2a-3)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-3)x-a^2+4$　……①

この直線が点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0=(2a-3)\cdot 0-a^2+4$

これを解いて　$a=\pm 2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 2)$

① から，接線の方程式は　$y=x$

$a=-2$ のとき，接点の座標は　$(-2,\ 14)$

① から，接線の方程式は　$y=-7x$

(2)　$y'=-2x+1$

接点の座標を $(a,\ -a^2+a-3)$ とすると，接線の方程式は

$y-(-a^2+a-3)=(-2a+1)(x-a)$

すなわち　$y=(-2a+1)x+a^2-3$　……①

この直線が点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=(-2a+1)\cdot 1+a^2-3$

よって　$a^2-2a-3=0$

これを解いて　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -5)$

① から，接線の方程式は　$y=3x-2$

$a=3$ のとき，接点の座標は　$(3,\ -9)$

① から，接線の方程式は　$y=-5x+6$

(3)　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+4)$ とすると，接線の方程式は

$y-(a^3+4)=3a^2(x-a)$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3+4$　……①

この直線が点 $(0,\ -12)$ を通るから　$-12=3a^2\cdot 0-2a^3+4$

よって　$a^3=8$

a は実数であるから　$a=2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 12)$

① から，接線の方程式は　$y=12x-12$

6．次の接線の方程式を求めよ。

(1)　点$(3,\ 4)$から放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線

(2)　曲線 $y=x^3-3x^2-1$ の接線で，原点を通るもの

解答　(1)　$y=2x-2$，$y=-6x+22$　　(2)　$y=-3x$，$y=\frac{15}{4}x$

解説

(1)　曲線の方程式を $y=f(x)$ とし，接点を $\mathrm{A}(a,\ -a^2+4a-3)$ とする。

$f'(x)=-2x+4$ から，A における放物線の接線の方程式は

$$y-(-a^2+4a-3)=(-2a+4)(x-a)$$

すなわち　$y=-2(a-2)x+a^2-3$

この接線が点$(3,\ 4)$を通るとすると

$4=-2(a-2)\cdot3+a^2-3$　整理して　$a^2-6a+5=0$

ゆえに$(a-1)(a-5)=0$ から　$a=1,\ 5$

よって，求める方程式は

$a=1$ のとき　$y=2x-2$，$a=5$ のとき　$y=-6x+22$

(2)　$f'(x)=3x^2-6x$ から，接点をA$(a\ ,\ a^3-3a^2-1)$とすると

Aにおける曲線の接線の方程式は

$$y-(a^3-3a^2-1)=(3a^2-6a)(x-a)\quad\cdots①$$

この接線が原点を通るとすると　$0-(a^3-3a^2-1)=(3a^2-6a)(0-a)$

整理して　$2a^3-3a^2+1=0$

ここで，$P(a)=2a^3-3a^2+1$ とすると

$P(1)=2\cdot1^3-3\cdot1^2+1=2-3+1=0$

よって，$P(a)$は$a-1$で割り切れる

実際に割り算すると

$$\begin{array}{r|l}
 & 2a^2-a-1 \\
\hline
a-1 & 2a^3-3a^2\quad\ +1 \\
 & 2a^3-2a^2 \\
\hline
 & \quad -a^2 \\
 & \quad -a^2+a \\
\hline
 & \qquad -a+1 \\
 & \qquad -a+1 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

より$P(a)=2a^3-3a^2+1=(a-1)(2a^2-a-1)$

と変形できる。また，$2a^2-a-1$を因数分解すると

$2a^2-a-1=(2a+1)(a-1)$より

$P(a)=(a-1)(2a+1)(a-1)=(a-1)^2(2a+1)$

と変形できる。

ゆえに　$(a-1)^2(2a+1)=0$

よって　$a=1,\ -\frac{1}{2}$

このとき，①に$a=1$を代入すると

$y-(1^3-3\cdot1^2-1)=(3\cdot1^2-6\cdot1)(x-1)$

整理して　$y=-3x$

①に$a=-\frac{1}{2}$を代入すると

$$y-\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right\}=\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-6\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

整理して　$y=\frac{15}{4}x$

以上より　　$y=-3x$　$y=\frac{15}{4}x$

7．次の関数の極値を求め，グラフをかけ。

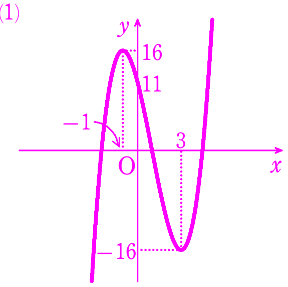
(1)　$y=x^3-3x^2-9x+11$　　　(2)　$y=(x-1)^2(x+2)$

(3)　$y=-2x^3+12x^2-18x$

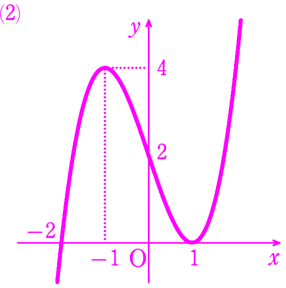
解答　(1)　$x=-1$ のとき極大値 16，$x=3$ のとき極小値 -16，[図]

(2)　$x=-1$ のとき極大値 4，$x=1$ のとき極小値 0，[図]

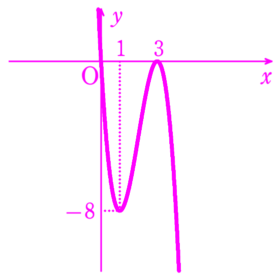
(1)



(2)



(3)　$x=1$ のとき極小値 -8，$x=3$ のとき極大値 0，[図]



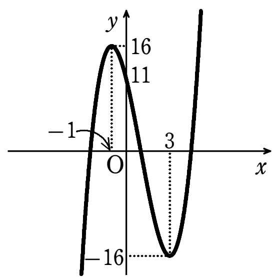
解説

(1)　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗



よって，$x=-1$ のとき極大値 16，

$x=3$ のとき極小値 -16　をとる。

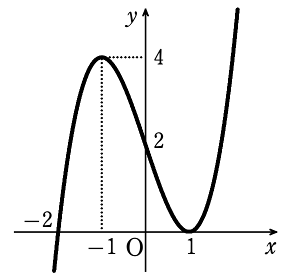
また，グラフは[図]

(2)　$y=x^3-3x+2$ であるから　　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm1$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



よって，$x=-1$ のとき極大値 4，

$x=1$ のとき極小値 0　をとる。

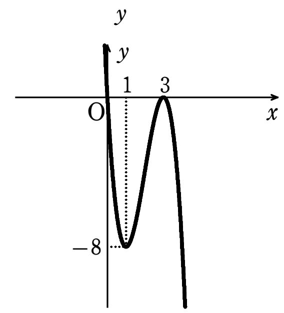
また，グラフは[図]

(3)　$y'=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘



よって，$x=1$ のとき極小値 -8，

$x=3$ のとき極大値 0　をとる。

また，グラフは[図]