数学演習（関数の増減と極大極小）Ｒ１．１０．２４　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の関数の増減を調べよ。また，極値を求めよ。

(1) $y=x^3+3x^2-9x$　　(2) $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+2$

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=-x^3+6x^2-9x+2$　　(2) $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x+3$

$\boxed{3}$ 次の関数の極値を求め，そのグラフの概形をかけ。

(1) $y=3x^4-16x^3+18x^2+5$　　(2) $y=x^4-8x^3+18x^2-11$

$\boxed{4}$ 関数 $y=|x^3-x^2|$ のグラフをかけ。

$\boxed{5}$ 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=0$ で極大値 2 をとり，$x=2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

$\boxed{6}$ (1)　関数 $f(x)=x^3+ax^2$ が極値をもつとき，定数 a の満たすべき条件を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=x^3-6x^2+6ax$ が極大値と極小値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(3)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ が極値をもたないための必要十分条件を求めよ。ただし，a は定数とする。

$\boxed{7}$ a は定数とする。$f(x)=x^3+ax^2+ax+1$ が $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとき，$f(\alpha)+f(\beta)=2$ ならば $a=\boxed{}$ である。

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)=x^3-6x^2+3ax-4$ の極大値と極小値の差が 4 となるとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{9}$ $f(x)=x^4+4x^3+ax^2$ について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　ただ 1 つの極値をもつ。

(2)　極大値と極小値をもつ。

数学演習（関数の増減と極大極小）Ｒ１．１０．２４

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の関数の増減を調べよ。また，極値を求めよ。

(1)　$y=x^3+3x^2-9x$　　　　(2)　$y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+2$

解答　(1)　$x\leqq-3$，$1\leqq x$ で単調に増加，$-3\leqq x\leqq 1$ で単調に減少；
$x=-3$ で極大値 27，$x=1$ で極小値 -5
(2)　常に単調に減少，極値をもたない

解説

(1)　$y'=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$
$=3(x+3)(x-1)$
$y'=0$ とすると　　$x=-3$，1
y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 27	$\searrow$	極小 -5	$\nearrow$

よって　区間 $x\leqq-3$，$1\leqq x$ で単調に増加，
区間 $-3\leqq x\leqq 1$ で単調に減少する。
また，$x=-3$ で極大値 27，$x=1$ で極小値 -5 をとる。

(2)　$y'=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$
$y'=0$ とすると　　$x=1$
y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	$\searrow$	$\dfrac{5}{3}$	$\searrow$

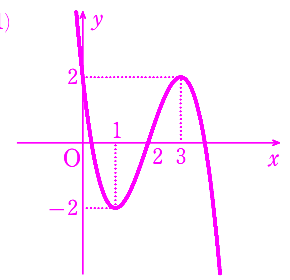
よって，常に単調に減少する。
したがって，極値をもたない。

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフをかけ。

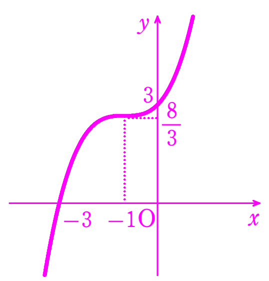
(1)　$y=-x^3+6x^2-9x+2$　　　　(2)　$y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+x+3$

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]

(1)



(2)



解説

(1)　$y'=-3x^2+12x-9$
$=-3(x^2-4x+3)$
$=-3(x-1)(x-3)$
$y'=0$ とすると　　$x=1$，3
y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$

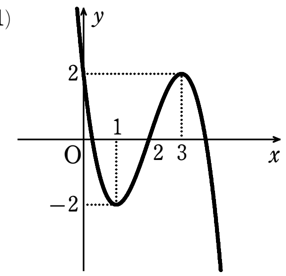
よって，グラフは下図 (1)

(2)　$y'=x^2+2x+1=(x+1)^2$
$y'=0$ とすると　　$x=-1$
y の増減表は右のようになる。

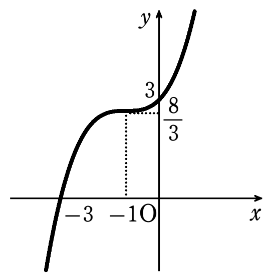
x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\dfrac{8}{3}$	$\nearrow$

ゆえに，常に単調に増加する。
よって，グラフは下図 (2)

(1)



(2)

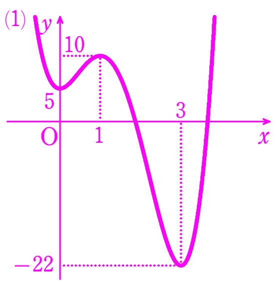


$\boxed{3}$ 次の関数の極値を求め，そのグラフの概形をかけ。

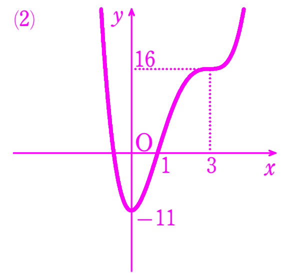
(1)　$y=3x^4-16x^3+18x^2+5$　　　　(2)　$y=x^4-8x^3+18x^2-11$

解答　(1)　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，$x=3$ で極小値 -22；[図]
(2)　$x=0$ で極小値 -11；[図]

(1)



(2)

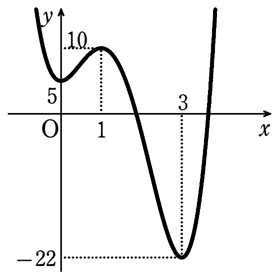


解説

(1)　$y'=12x^3-48x^2+36x=12x(x^2-4x+3)=12x(x-1)(x-3)$
$y'=0$ とすると　　$x=0$，1，3
y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	極小 5	$\nearrow$	極大 10	$\searrow$	極小 -22	$\nearrow$

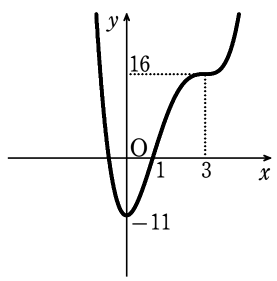
よって　　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，
$x=3$ で極小値 -22 をとる。
また，グラフは右の図のようになる。



(2)　$y'=4x^3-24x^2+36x=4x(x^2-6x+9)=4x(x-3)^2$
$y'=0$ とすると　　$x=0$，3
y の増減表は次のようになる。

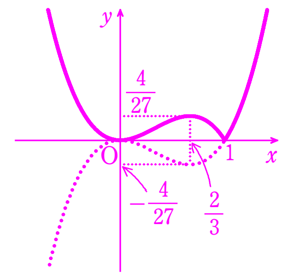
x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$	極小 -11	$\nearrow$	16	$\nearrow$

よって　　$x=0$ で極小値 -11　をとる。
また，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{4}$ 関数 $y=|x^3-x^2|$ のグラフをかけ。

解答　[図]

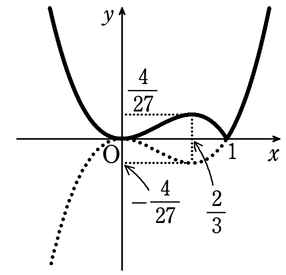


解説

$y=x^3-x^2$ …… ① とする。
$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$
$y'=0$ とすると　　$x=0$，$\dfrac{2}{3}$
① の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 $-\dfrac{4}{27}$	$\nearrow$

$y=|x^3-x^2|$ のグラフは，① のグラフの $y<0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返したものである。
よって，グラフは図の実線部分。



$\boxed{5}$ 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=0$ で極大値 2 をとり，$x=2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

解説

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$x=0$ で極大値 2 をとるから　　$f(0)=2$，$f'(0)=0$
$x=2$ で極小値 -6 をとるから　　$f(2)=-6$，$f'(2)=0$
よって　　$d=2$，$c=0$，$8a+4b+2c+d=-6$，$12a+4b+c=0$
これを解いて　　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$
逆に，このとき
$f(x)=2x^3-6x^2+2$　…… ①
$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$
$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，2
関数 ① の増減表は右のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -6	$\nearrow$

したがって　　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

6 (1)　関数 $f(x)=x^3+ax^2$ が極値をもつとき，定数 a の満たすべき条件を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=x^3-6x^2+6ax$ が極大値と極小値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(3)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ が極値をもたないための必要十分条件を求めよ。ただし，a は定数とする。

解答　(1)　$a \neq 0$　　(2)　$a<2$　　(3)　$-\sqrt{3} \leqq a \leqq \sqrt{3}$

解説

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$3x^2+2ax=0$ の判別式を D とすると　　$D>0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=a^2-3\cdot 0=a^2$　　ゆえに，$a^2>0$ から　　$a \neq 0$

(2)　$f'(x)=3x^2-12x+6a=3(x^2-4x+2a)$

$f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって，$x^2-4x+2a=0$ の判別式を D とすると　　$D>0$

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 2a=4-2a$ から，$4-2a>0$ より　　$a<2$

(3)　$f'(x)=3x^2+2ax+1$

$f(x)$ が極値をもたないための必要十分条件は，$f'(x)$ の符号が変わらないことである。ゆえに，$f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+1=0$ ……① は実数解を 1 つだけもつかまたは実数解をもたない。よって，① の判別式を D とすると　　$D \leqq 0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=a^2-3\cdot 1=(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

ゆえに　$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) \leqq 0$　　よって　$-\sqrt{3} \leqq a \leqq \sqrt{3}$

7 a は定数とする。$f(x)=x^3+ax^2+ax+1$ が $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ で極値をとるとき，$f(\alpha)+f(\beta)=2$ ならば $a=\boxed{}$ である。

解答　$\dfrac{9}{2}$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

$f(x)$ は $x=\alpha,\ \beta$ で極値をとるから，$f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+a=0$ ……① は異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつ。

よって，① の判別式を D とすると　　$D>0$

$\dfrac{D}{4}=a^2-3\cdot a=a(a-3)$ であるから　　$a(a-3)>0$

したがって　　$a<0,\ 3<a$　……②

また，① で，解と係数の関係より　　$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{3}a$

ここで　$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+2$

$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+a(\alpha+\beta)+2$$

$$=\left(-\frac{2}{3}a\right)^3-3\cdot\frac{1}{3}a\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)+a\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}a\right\}+a\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)+2$$

$$=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}a^2+2$$

$f(\alpha)+f(\beta)=2$ から　　$\dfrac{4}{27}a^3-\dfrac{2}{3}a^2+2=2$

よって　　$2a^3-9a^2=0$　すなわち　$a^2(2a-9)=0$

② を満たすものは　　$a=\dfrac{9}{2}$

8 関数 $f(x)=x^3-6x^2+3ax-4$ の極大値と極小値の差が 4 となるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=3$

解説

$f'(x)=3x^2-12x+3a$

$f(x)$ は極大値と極小値をとるから，2 次方程式 $f'(x)=0$ すなわち

$3x^2-12x+3a=0$ ……① は異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつ。

よって，① の判別式を D とすると　　$D>0$

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-3\cdot 3a=9(4-a)$ であるから　　$4-a>0$

したがって　　$a<4$　……②

$f(x)$ の x^3 の係数が正であるから，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となる。

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^3-\beta^3)-6(\alpha^2-\beta^2)+3a(\alpha-\beta)$$
$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-6(\alpha+\beta)+3a\}$$
$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+3a\}$$

① で，解と係数の関係より　　$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=a$

よって　　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\cdot a=4(4-a)$

$\alpha<\beta$ より，$\alpha-\beta<0$ であるから　　$\alpha-\beta=-2\sqrt{4-a}$

ゆえに　　$f(\alpha)-f(\beta)=-2\sqrt{4-a}\,(4^2-a-6\cdot 4+3a)=-2\sqrt{4-a}\,\{-2(4-a)\}$

$$=4(\sqrt{4-a})^3$$

$f(\alpha)-f(\beta)=4$ であるから　　$4(\sqrt{4-a})^3=4$

すなわち　　$(\sqrt{4-a})^3=1$　　よって　　$\sqrt{4-a}=1$

ゆえに，$4-a=1$ から　　$a=3$　　これは ② を満たす。

参考　($f(\alpha)-f(\beta)$ の計算)

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=3\left\{-\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right\}$$

これに $\alpha-\beta=-2\sqrt{4-a}$ を代入して，$f(\alpha)-f(\beta)=4(\sqrt{4-a})^3$ となる。

9 $f(x)=x^4+4x^3+ax^2$ について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　ただ 1 つの極値をもつ。　　(2)　極大値と極小値をもつ。

解答　(1)　$a=0,\ a \geqq \dfrac{9}{2}$　　(2)　$a<0,\ 0<a<\dfrac{9}{2}$

解説

$f'(x)=4x^3+12x^2+2ax=2x(2x^2+6x+a)$

(1)　$f(x)$ がただ 1 つの極値をもつのは，3 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもたないときである。

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$　または　$2x^2+6x+a=0$

よって，求める条件は，$2x^2+6x+a=0$ が次の [1] または [2] のような解をもつことである。

[1]　重解または虚数解をもつ　　　[2]　$x=0$ を解にもつ

[1]　$2x^2+6x+a=0$ の判別式を D とすると　　$D \leqq 0$

$\dfrac{D}{4}=3^2-2a=9-2a$　　よって，$9-2a \leqq 0$ から　　$a \geqq \dfrac{9}{2}$

[2]　$2x^2+6x+a=0$ に $x=0$ を代入すると　　$a=0$

したがって　　$a=0,\ a \geqq \dfrac{9}{2}$

(2)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつのは，3 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつことである。

よって，$2x^2+6x+a=0$ は $x \neq 0$ の異なる 2 つの実数解をもつ。

ゆえに　　$\dfrac{D}{4}=9-2a>0$　かつ　$a \neq 0$

したがって　　$a<0,\ 0<a<\dfrac{9}{2}$