数学演習（３次関数の極値･最大最小･実数解の個数）Ｈ２２．１１．４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a+1)x$ が $x=1$ で極値をもつとき，定数 a の値と $f(x)$ の極小値を求めよ。

２．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき，定数 a，b の値と $f(x)$ の極大値を求めよ。

３．3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=-2$ で極大値 11 をとり，$x=1$ で極小値 -16 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

４．関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が，すべての実数の範囲で常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

５．次の条件を満たすような，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が極値をもつ。

(2)　関数 $g(x)=x^3-x^2+ax+2$ が極値をもたない。

６．a は定数とする。関数 $y=x(x-a)^2$ の極値を，次の各場合について求めよ。

(1)　$a<0$　　(2)　$a=0$　　(3)　$a>0$

7．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^3-12x$　$(-3\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=x^3-3x^2+4$　$(-2\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x^3-6x^2+9x$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(4)　$y=-2x^3+3x^2+12x-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

8．関数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -27 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

9．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$2x^3-6x-1=0$　(2)　$x^3+6x^2-6=0$　(3)　$x^3-4x^2+6x-1=0$

10. 方程式 $2x^3-9x^2+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

11. 方程式 $x^3-3x^2-9x+11-a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

数学演習（３次関数の極値･最大最小･実数解の個数）Ｈ２２．１１．４　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1．関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a+1)x$ が $x=1$ で極値をもつとき，定数 a の値と $f(x)$ の極小値を求めよ。

解答　$a=2$，$x=3$ のとき極小値 0

解説

$f'(x)=x^2-2ax+a+1$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるから　$f'(1)=0$

ゆえに　$-a+2=0$　よって　$a=2$

このとき　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$

$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{3}$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

以上から　$a=2$，$x=3$ のとき極小値 0

2．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき，定数 a，b の値と $f(x)$ の極大値を求めよ。

解答　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ のとき極大値 6

解説

$f'(x)=3x^2-6x+a$

$x=3$ で極小値 -26 をとるから　$f'(3)=0$，$f(3)=-26$

よって　$9+a=0$，$3a+b=-26$

これを解いて　$a=-9$，$b=1$

このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 6	$\searrow$	極小 -26	$\nearrow$

以上から　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ のとき極大値 6

3．3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=-2$ で極大値 11 をとり，$x=1$ で極小値 -16 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=3$，$c=-12$，$d=-9$

解説

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=-2$ で極大値 11 をとるから　$f'(-2)=0$，$f(-2)=11$

よって　$12a-4b+c=0$　……①

$-8a+4b-2c+d=11$　……②

また，$x=1$ で極小値 -16 をとるから　$f'(1)=0$，$f(1)=-16$

よって　$3a+2b+c=0$　……③

$a+b+c+d=-16$　……④

④−② から　$9a-3b+3c=-27$

ゆえに　$3a-b+c=-9$　……⑤

③−⑤ から　$3b=9$　よって　$b=3$

$b=3$ を ①，③ に代入して，a と c の連立方程式を解くと

$a=2$，$c=-12$

さらに，④ から　$d=-9$

このとき　$f(x)=2x^3+3x^2-12x-9$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 11	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$

以上から　$a=2$，$b=3$，$c=-12$，$d=-9$

4．関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が，すべての実数の範囲で常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-6\leqq a\leqq 6$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+12$

$f(x)$ がすべての実数の範囲で常に増加するための条件は

$f'(x)\geqq 0$　すなわち　$3x^2+2ax+12\geqq 0$

が常に成り立つことである。

ゆえに，2 次方程式 $3x^2+2ax+12=0$ の判別式 D について　$D\leqq 0$

$\frac{D}{4}=a^2-36=(a+6)(a-6)$ であるから　$(a+6)(a-6)\leqq 0$

したがって　$-6\leqq a\leqq 6$

5．次の条件を満たすような，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が極値をもつ。

(2)　関数 $g(x)=x^3-x^2+ax+2$ が極値をもたない。

解答　(1)　$a<0$，$1<a$　(2)　$a\geqq\frac{1}{3}$

解説

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ から　$f'(x)=3x^2-6ax+3a$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，2 次方程式 $3x^2-6ax+3a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

ゆえに，判別式 D について　$D>0$

$\frac{D}{4}=(-3a)^2-3\cdot 3a=9a(a-1)$ であるから　$9a(a-1)>0$

したがって　$a<0$，$1<a$

(2)　$g(x)=x^3-x^2+ax+2$ から　$g'(x)=3x^2-2x+a$

$g(x)$ が極値をもたないための条件は，2 次方程式 $3x^2-2x+a=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたないことである。

よって，判別式 D について　$\frac{D}{4}=(-1)^2-3a\leqq 0$

ゆえに　$a\geqq\frac{1}{3}$

6．a は定数とする。関数 $y=x(x-a)^2$ の極値を，次の各場合について求めよ。

(1)　$a<0$　(2)　$a=0$　(3)　$a>0$

解答　(1)　$x=a$ で極大値 0，$x=\frac{a}{3}$ で極小値 $\frac{4}{27}a^3$　(2)　極値はない

(3)　$x=\frac{a}{3}$ で極大値 $\frac{4}{27}a^3$，$x=a$ で極小値 0

解説

$y=x^3-2ax^2+a^2x$ から　$y'=3x^2-4ax+a^2=(x-a)(3x-a)$

$y'=0$ とすると　$x=a$，$\frac{a}{3}$

(1)　$a<0$ のとき　$a<\frac{a}{3}$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 $\frac{4}{27}a^3$	$\nearrow$

よって，$x=a$　で極大値 0，

$x=\frac{a}{3}$ で極小値 $\frac{4}{27}a^3$　をとる。

(2)　$a=0$ のとき　$y'=3x^2$

$x=0$ のとき　$y'=0$，　$x\neq 0$ のとき　$y'>0$

ゆえに，y は常に増加し，極値はない。

(3)　$a>0$ のとき　$a>\frac{a}{3}$

y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{27}a^3$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって，$x=\frac{a}{3}$ で極大値 $\frac{4}{27}a^3$，

$x=a$　で極小値 0　をとる。

7．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^3-12x$　　$(-3\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=x^3-3x^2+4$　$(-2\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x^3-6x^2+9x$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(4)　$y=-2x^3+3x^2+12x-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

解答　(1)　$x=-2$ のとき最大値 16，$x=2$ のとき最小値 -16

(2)　$x=0$，3 のとき最大値 4，$x=-2$ のとき最小値 -16

(3)　$x=1$ のとき最大値 4，$x=-1$ のとき最小値 -16

(4)　$x=1$ のとき最大値 10，$x=-1$ のとき最小値 -10

解説

(1)　$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 2$

$-3\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	-9

よって，$x=-2$ のとき最大値 16，

$x=2$　のとき最小値 -16 をとる。

(2)　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0$，2

$-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

よって，$x=0$，3 のとき最大値 4，

$x=-2$　のとき最小値 -16 をとる。

(3)　$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=1$，3

$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	2

よって，$x=1$　のとき最大値 4，

$x=-1$ のとき最小値 -16 をとる。

(4)　$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1$，2

$-2\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-10	$\nearrow$	10

よって，$x=1$　のとき最大値 10，

$x=-1$ のとき最小値 -10 をとる。

8．関数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -27 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

解答　$a=2$，$b=5$

解説

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，4

$a>0$ であるから，$-1\leqq x\leqq 2$ における増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$b-7a$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$b-16a$

ゆえに，最大値は　　$f(0)=b$

また，$a>0$ より，$b-7a>b-16a$ であるから

最小値は　　$f(2)=b-16a$

条件から　　$b=5$，$b-16a=-27$

よって　　$a=2$，$b=5$

これは $a>0$ を満たす。

9．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$2x^3-6x-1=0$　　　(2)　$x^3+6x^2-6=0$　　　(3)　$x^3-4x^2+6x-1=0$

解答　(1)　3 個　　(2)　3 個　　(3)　1 個

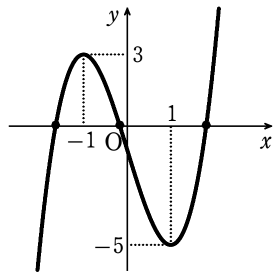
解説

(1)　$f(x)=2x^3-6x-1$ とおくと　　$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 1$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極小 -5	$\nearrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，このグラフと x 軸の共有点の個数は　3 個

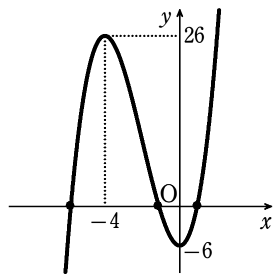
したがって，方程式の異なる実数解の個数は　3 個

(2)　$f(x)=x^3+6x^2-6$ とおくと　　$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，-4

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 26	$\searrow$	極小 -6	$\nearrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，このグラフと x 軸の共有点の個数は　3 個

したがって，方程式の異なる実数解の個数は　3 個

(3)　$f(x)=x^3-4x^2+6x-1$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-8x+6=3\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)+6=3\left\{x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-3\left(\frac{4}{3}\right)^2+6$$

$$=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

常に $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は常に増加する。

また　　$f(0)=-1<0$，$f(1)=2>0$

よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は　1 個

したがって，方程式の異なる実数解の個数は　1 個

10．方程式 $2x^3-9x^2+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$0<a<27$

解説

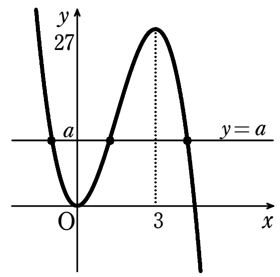
方程式を変形すると　　$-2x^3+9x^2=a$

$f(x)=-2x^3+9x^2$ とおくと　　$f'(x)=-6x^2+18x=-6x(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，3

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 27	$\searrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから，図より

$0<a<27$

11．方程式 $x^3-3x^2-9x+11-a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

解答　$a<-16$，$16<a$ のとき　1 個；$a=-16$，16 のとき　2 個；

$-16<a<16$ のとき　3 個

解説

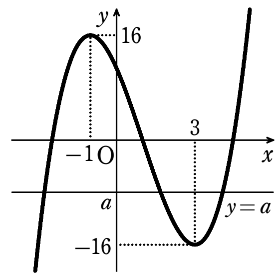
方程式を変形すると　　$x^3-3x^2-9x+11=a$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ とおくと　　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1$，3

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 16	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の異なる実数解の個数に一致する。

したがって，求める実数解の個数は

$a<-16$，$16<a$ のとき　1 個；

$a=-16$，16 のとき　2 個；

$-16<a<16$ のとき　3 個