数学演習（不等式•接線の本数•最大最小）Ｈ２２．１１．１２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$x>1$ のとき　$x^3-3x^2+6x-4>0$

2．次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x>2$ のとき　$x^3+16>12x$

(2)　$x \geqq 0$ のとき　$x^3+3x^2-9x+5 \geqq 0$

3．曲線 $C$ : $y=x^3+3x^2+x$ と点 A$(1,\ a)$ がある。A を通って $C$ に 3 本の接線が引けるとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

4．点 A$(0,\ a)$ から曲線 $C$ : $y=x^3-9x^2+15x-7$ に引くことができる接線の本数を調べよ。

5．$a \geqq 0$ のとき，$x$ の関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を，次の各場合について求めよ。

(1)　$a=0$　　(2)　$0<a<1$　　(3)　$1 \leqq a$

6．$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値，最小値を求めよ。

7．関数 $f(x)=3x^3-k^2x+2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値，最小値を次の各場合について求めよ。

(1)　$k=0$　　(2)　$0<k<\sqrt{3}$　　(3)　$k=\sqrt{3}$

(4)　$\sqrt{3}<k<3$　　(5)　$k=3$　　(6)　$3<k$

# 数学演習（不等式•接線の本数•最大最小）Ｈ２２．１１．１２

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

**1．** 次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$　　　(2)　$x>1$ のとき　$x^3-3x^2+6x-4>0$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(x)=2x^3+1-3x^2$ とおくと　　$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 1$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

| $x$ | 0 | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | 0 | ↗ |

よって，$f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとる。

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq 0$

すなわち　　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$f(x)=x^3-3x^2+6x-4$ とおくと

$f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3$

よって $f'(x)>0$ であるから，

$f(x)$ は単調に増加する。

| $x$ | 1 | … |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | ↗ |

また　　$f(1)=1-3+6-4=0$

よって，$x>1$ のとき　　$f(x)>0$

すなわち　　$x^3-3x^2+6x-4>0$

**2．** 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x>2$ のとき　$x^3+16>12x$　　　(2)　$x \geqq 0$ のとき　$x^3+3x^2-9x+5 \geqq 0$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(x)=x^3+16-12x$ とすると

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 2$

$x \geqq 2$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

| $x$ | 2 | … |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | ↗ |

よって，$x>2$ のとき　　$f(x)>0$

したがって　　$x^3+16>12x$

(2)　$f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ とすると

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ -3$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

| $x$ | 0 | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 5 | ↘ | 極小 0 | ↗ |

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき，$f(x)$ は

$x=1$ で最小値 0

をとる。

よって，$x \geqq 0$ のとき　　$f(x) \geqq 0$

したがって　　$x^3+3x^2-9x+5 \geqq 0$

**3．** 曲線 $C:y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。A を通って $C$ に 3 本の接線が引けるとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

解答　$-3<a<5$

解説

$y'=3x^2+6x+1$ であるから，曲線 $C$ 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線の方程式は

$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t)$

すなわち　　$y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2$

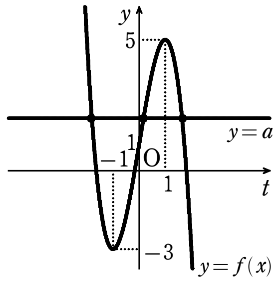
この接線が点 $(1,\ a)$ を通るとすると　　$-2t^3+6t+1=a$　……①

$f(t)=-2t^3+6t+1$ とすると

$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

| $t$ | … | $-1$ | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(t)$ | ↘ | 極小 $-3$ | ↗ | 極大 5 | ↘ |




3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線が異なるから，$t$ の 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつとき，点 A から曲線 $C$ に 3 本の接線が引ける。

したがって，曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点で交わる条件を求めて

$-3<a<5$

**4．** 点 A $(0,\ a)$ から曲線 $C:y=x^3-9x^2+15x-7$ に引くことができる接線の本数を調べよ。

解答　$a<-7$ のとき 1 本，$a=-7$ のとき 2 本，$-7<a<20$ のとき 3 本，$a=20$ のとき 2 本，$20<a$ のとき 1 本

解説

$y=x^3-9x^2+15x-7$ から　　$y'=3x^2-18x+15$

$C$ 上の点 $(t,\ t^3-9t^2+15t-7)$ における接線の方程式は

$y-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(x-t)$

すなわち　$y=(3t^2-18t+15)x-2t^3+9t^2-7$

この接線が点 $(0,\ a)$ を通るとすると　　$-2t^3+9t^2-7=a$　……①

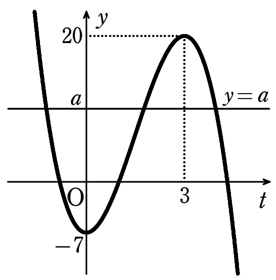
3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線が異なる。

よって，A から $C$ に引くことができる接線の本数は，① の異なる実数解の個数に一致する。

$f(t)=-2t^3+9t^2-7$ とすると　　$f'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

| $t$ | … | 0 | … | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(t)$ | ↘ | $-7$ | ↗ | 20 | ↘ |




よって，$y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が求める接線の本数と一致するから

$a<-7$ のとき 1 本，$a=-7$ のとき 2 本，

$-7<a<20$ のとき 3 本，$a=20$ のとき 2 本，

$20<a$ のとき 1 本

**5．** $a \geqq 0$ のとき，$x$ の関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を，次の各場合について求めよ。

(1)　$a=0$　　　(2)　$0<a<1$　　　(3)　$1 \leqq a$

解答　(1)　最大値 1，最小値 0

(2)　最大値は　$0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $1-3a^2$，$\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq a<1$ のとき 0；

最小値 $-2a^3$

(3)　最大値 0，最小値 $1-3a^2$

解説

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm a$

(1)　$a=0$ のとき　　$f'(x)=3x^2 \geqq 0$

よって，$f(x)$ は常に増加する。

したがって，最大値は　$f(1)=1$，最小値は　$f(0)=0$

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

| $x$ | 0 | … | $a$ | … | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | 極小 $-2a^3$ | ↗ | $1-3a^2$ |

よって，最小値は　$f(a)=-2a^3$

最大値は　$f(0)$ または $f(1)$

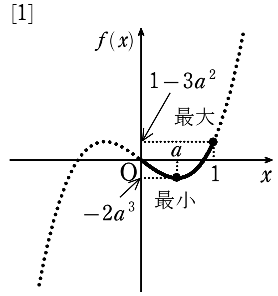
$f(0)=f(1)$　すなわち　$1-3a^2=0$ を満たす

$a$ の値は，$0<a<1$ であるから　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

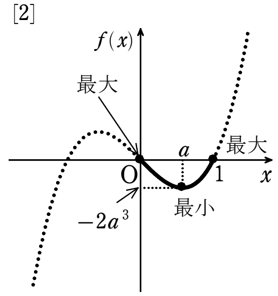
[1]　$0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　[2]　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　[3]　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<a<1$　の各場合において

$f(0)<f(1)$　　　$f(0)=f(1)$　　　$f(0)>f(1)$　であるから

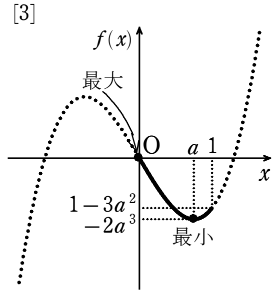
[1]




[2]




[3]




最大値は　$0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$f(1)=1-3a^2$，$\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq a<1$ のとき　$f(0)=0$

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ において　　$f'(x) \leqq 0$

よって，この範囲で $f(x)$ は常に減少する。

したがって，最大値は　$f(0)=0$，最小値は　$f(1)=1-3a^2$

6．$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値，最小値を求めよ。

解答　$0<a<2$ のとき　$x=0$ で最大値 2，$x=a$ で最小値 $a^3-3a^2+2$；
$2\leqq a<3$ のとき　$x=0$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 $-2$ ；
$a=3$ のとき　$x=0$，3 で最大値 2，$x=2$ で最小値 $-2$ ；
$3<a$ のとき　$x=a$ で最大値 $a^3-3a^2+2$，$x=2$ で最小値$-2$

解説

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，2

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 2 | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ |

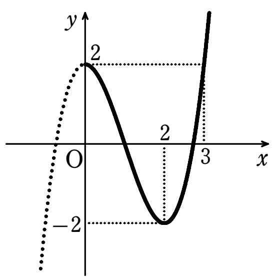
また，定義域左端と同じ$y$座標となるのは

$f(x)=2$ とすると　　$x^3-3x^2+2=2$

よって　　$x^2(x-3)=0$　　　ゆえに　　$x=0$，3

従って，$x=0$と同じ$y$座標となるのは$x=3$のとき

$x\geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。




したがって，$0<a<2$ のとき
　　$x=0$ で最大値 2，
　　$x=a$ で最小値 $a^3-3a^2+2$

$2\leqq a<3$ のとき
　　$x=0$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 $-2$

$a=3$ のとき
　　$x=0$，3 で最大値 2，$x=2$ で最小値 $-2$

$3<a$ のとき
　　$x=a$ で最大値 $a^3-3a^2+2$，$x=2$ で最小値 $-2$

7．関数 $f(x)=3x^3-k^2x+2$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値，最小値を次の各場合について求めよ。

(1)　$k=0$　　(2)　$0<k<\sqrt{3}$　　(3)　$k=\sqrt{3}$
(4)　$\sqrt{3}<k<3$　　(5)　$k=3$　　(6)　$3<k$

解答　(1)　$x=1$ で最大値 5，$x=0$ で最小値 2
(2)　$x=1$ で最大値 $-k^2+5$，$x=\dfrac{k}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2}{9}k^3+2$
(3)　$x=0$，1 で最大値 2，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2$
(4)　$x=0$ で最大値 2，$x=\dfrac{k}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2}{9}k^3+2$
(5)　$x=0$ で最大値 2，$x=1$ で最小値 $-4$
(6)　$x=0$ で最大値 2，$x=1$ で最小値 $-k^2+5$

解説

$$f'(x)=9x^2-k^2=(3x+k)(3x-k)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\dfrac{k}{3}$

また　　$f(0)=2$，$f(1)=-k^2+5$

(1)　$k=0$ のとき　　$f'(x)=9x^2\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。
　よって，$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)$ は
　　$x=1$ で最大値 5，$x=0$ で最小値 2 をとる。

(2)　$0<k<\sqrt{3}$ のとき　　$0<\dfrac{k}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{k}{3}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 2 | $\searrow$ | $-\dfrac{2}{9}k^3+2$ | $\nearrow$ | $-k^2+5$ |

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{k}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2}{9}k^3+2$ をとる。

最大値は　　$f(0)$ または $f(1)$

ここで大小関係を調べるために差をとると

$f(0)-f(1)=2-(-k^2+5)=k^2-3$

$0<k<\sqrt{3}$ から　　$k^2-3<0$　　ゆえに　　$f(0)<f(1)$

よって，$f(x)$ は $x=1$ で最大値 $-k^2+5$ をとる。

(3)　$k=\sqrt{3}$ のとき　　$\dfrac{k}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，(2) の表で $k=\sqrt{3}$ を代入したもので，次のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 2 | $\searrow$ | $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2$ | $\nearrow$ | 2 |

よって，$f(x)$ は　　$x=0$，1 で最大値 2，
　　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2$ をとる。

(4)　$\sqrt{3}<k<3$ のとき　　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{k}{3}<1$

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，(2) の表と同じものである。

また，$\sqrt{3}<k<3$ から　　$f(0)-f(1)=k^2-3>0$

ゆえに　　$f(0)>f(1)$

よって，$f(x)$ は　　$x=0$ で最大値 2，
　　$x=\dfrac{k}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2}{9}k^3+2$ をとる。

(5)　$k=3$ のとき　　$f'(x)=9(x+1)(x-1)$

$0\leqq x\leqq 1$ において $f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少する。

よって，$f(x)$ は　　$x=0$ で最大値 2，
　　$x=1$ で最小値 $-4$ をとる。

(6)　$k>3$ のとき　　$0\leqq x\leqq 1$ において $f'(x)<0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少する。

よって，$f(x)$ は　　$x=0$ で最大値 2，
　　$x=1$ で最小値 $-k^2+5$ をとる。