数学演習（平均変化率と微分係数）Ｈ２２．１０．８

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

(1)　関数 $f(x)=-3x+1$ の，$x=0$ から $x=3$ までの平均変化率

(2)　関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の，$x=-1$ から $x=3$ までの平均変化率

(3)　関数 $f(x)=x^3+x$ の，$x=1$ から $x=2$ までの平均変化率

(4)　関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

2．次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{h\to 0}(-3+h)$

(2)　$\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)$

(3)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{-4h+h^2}{h}$

(4)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{h^3+6h^2+12h}{h}$

3．定義に従って，次の関数の与えられた x の値における微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x-3$　$(x=0)$

(2)　$f(x)=x^2-3x+2$　$(x=1)$

(3)　$f(x)=-x^2+4x+5$　$(x=-2)$

(4)　$f(x)=x^3+3x$　$(x=3)$

4．関数 $y=x^2-4x$ のグラフ上の，次の各点における接線の傾きを求めよ。

(1)　$(1,\ -3)$

(2)　$(-2,\ 12)$

(3)　$(2,\ -4)$

5．関数 $y=x^2+ax$ のグラフ上の，x 座標が 1 である点における接線の傾きが 4 であるとき，定数 a の値を求めよ。

6．次の極限値を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}$

(2)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{3(-a+h)^2-3a^2}{h}$

7．関数 $f(x)=2x^2-5x+6$ の，$a\leqq x\leqq a+1$ における平均変化率 m が，$x=1$ における微分係数と一致するとき，定数 a の値を求めよ。

8．関数 $f(x)=3x^2-2$ のグラフ上の 2 点 $(1,\ f(1))$，$(3,\ f(3))$ を結ぶ線分の傾きが点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しいとき，a の値を求めよ。

9．関数 $f(x)=x^3-3x$ の $x=2$ における微分係数を求めよ。

10. 関数 $f(x)=-x^2+2x-3$ について，微分係数 $f'(0)$，$f'(1)$，$f'(-1)$ を求めよ。

11. 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $y=x^2-3x+2$ $(1,\ 0)$

(2) $y=-2x^2+4x-1$ $(0,\ -1)$

(3) $y=x^3+4$ $(-2,\ -4)$

(4) $y=5x-x^3$ $(2,\ 2)$

数学演習（平均変化率と微分係数）Ｈ２２．１０．８　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．次の平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

(1)　関数 $f(x)=-3x+1$ の，$x=0$ から $x=3$ までの平均変化率

(2)　関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の，$x=-1$ から $x=3$ までの平均変化率

(3)　関数 $f(x)=x^3+x$ の，$x=1$ から $x=2$ までの平均変化率

(4)　関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

解答　(1)　-3　　(2)　0　　(3)　8　　(4)　$2(b+a)$

解説

(1)　$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{-8-1}{3}=-3$

(2)　$\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{5-5}{4}=0$

(3)　$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{10-2}{1}=8$

(4)　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{2b^2-2a^2}{b-a}=\dfrac{2(b+a)(b-a)}{b-a}=2(b+a)$

２．次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{h\to 0}(-3+h)$　　(2)　$\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)$

(3)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{-4h+h^2}{h}$　　(4)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{h^3+6h^2+12h}{h}$

解答　(1)　-3　　(2)　3　　(3)　-4　　(4)　12

解説

(1)　$\lim_{h\to 0}(-3+h)=-3$

(2)　$\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$

(3)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{-4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h(-4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-4+h)=-4$

(4)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{h^3+6h^2+12h}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h(h^2+6h+12)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+6h+12)=12$

３．定義に従って，次の関数の与えられた x の値における微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x-3$　$(x=0)$　　(2)　$f(x)=x^2-3x+2$　$(x=1)$

(3)　$f(x)=-x^2+4x+5$　$(x=-2)$　　(4)　$f(x)=x^3+3x$　$(x=3)$

解答　(1)　2　　(2)　-1　　(3)　8　　(4)　30

解説

注意　<u>「定義に従って」とあるときは，必ず極限を用いること</u>

(1)　$f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(2h-3)-(2\cdot 0-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2h}{h}=2$

(2)　$f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(1+h)^2-3(1+h)+2\}-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-1+h)=-1$

(3)　$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{-(-2+h)^2+4(-2+h)+5\}-(-7)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{8h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(8-h)=8$

(4)　$f'(3)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(3+h)^3+3(3+h)\}-36}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{30h+9h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(30+9h+h^2)=30$

４．関数 $y=x^2-4x$ のグラフ上の，次の各点における接線の傾きを求めよ。

(1)　$(1,\ -3)$　　(2)　$(-2,\ 12)$　　(3)　$(2,\ -4)$

解答　(1)　-2　　(2)　-8　　(3)　0

解説

$f(x)=x^2-4x$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しい。

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(a+h)^2-4(a+h)\}-(a^2-4a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(2a-4)h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2a-4+h)=2a-4$

(1)　$f'(1)=2\cdot 1-4=-2$

(2)　$f'(-2)=2\cdot(-2)-4=-8$

(3)　$f'(2)=2\cdot 2-4=0$

５．関数 $y=x^2+ax$ のグラフ上の，x 座標が 1 である点における接線の傾きが 4 であるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=2$

解説

$f(x)=x^2+ax$ とすると，x 座標が 1 である点における接線の傾きは $f'(1)$ に等しい。

$f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(1+h)^2+a(1+h)\}-(1+a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2h+ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+a+h)=2+a$

条件より，$f'(1)=4$ であるから　　$2+a=4$

これを解いて　　$a=2$

６．次の極限値を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}$　　(2)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{3(-a+h)^2-3a^2}{h}$

解答　(1)　3　　(2)　$-6a$

解説

(1)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(-1+3h-3h^2+h^3)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3h-3h^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3-3h+h^2)=3$

(2)　$\lim_{h\to 0}\dfrac{3(-a+h)^2-3a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3(a^2-2ah+h^2)-3a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-6ah+3h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(-6a+3h)=-6a$

７．関数 $f(x)=2x^2-5x+6$ の，$a \leqq x \leqq a+1$ における平均変化率 m が，$x=1$ における微分係数と一致するとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=\dfrac{1}{2}$

解説

関数 $f(x)$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における平均変化率 m は

$m=\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=\dfrac{\{2(a+1)^2-5(a+1)+6\}-(2a^2-5a+6)}{1}$

$=4a-3$

また　　$f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{2(1+h)^2-5(1+h)+6\}-3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-1+2h)=-1$

条件より，$m=f'(1)$ であるから　　$4a-3=-1$

したがって　　$a=\dfrac{1}{2}$

８．関数 $f(x)=3x^2-2$ のグラフ上の 2 点 $(1,\ f(1))$，$(3,\ f(3))$ を結ぶ線分の傾きが点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しいとき，a の値を求めよ。

解答　$a=2$

解説

2 点 $(1,\ f(1))$，$(3,\ f(3))$ を結ぶ線分の傾きは　　$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{25-1}{2}=12$

点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{3(a+h)^2-2\}-(3a^2-2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{6ah+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6a+3h)=6a$

条件から　　$12=6a$　　　よって　　$a=2$

９．関数 $f(x)=x^3-3x$ の $x=2$ における微分係数を求めよ。

解答　9

解説

$f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(2+h)^3-3(2+h)\}-(2^3-3\cdot 2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{9h+6h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h(9+6h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(9+6h+h^2)=9$

10. 関数 $f(x)=-x^2+2x-3$ について，微分係数 $f'(0)$，$f'(1)$，$f'(-1)$ を求めよ。

解答　$f'(0)=2$，$f'(1)=0$，$f'(-1)=4$

解説

$f(0+h)-f(0)=-h^2+2h-3-(-3)=-h(h-2)$

よって　$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\{-(h-2)\}=2$

$f(1+h)-f(1)=-(1+h)^2+2(1+h)-3-(-1^2+2\cdot 1-3)$

$=-h^2$

よって　$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h)=0$

$f(-1+h)-f(-1)=-(-1+h)^2+2(-1+h)-3-\{-(-1)^2+2(-1)-3\}$

$=-h^2+4h=h(4-h)$

よって　$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}(4-h)=4$

11. 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+2$　$(1,\ 0)$　(2)　$y=-2x^2+4x-1$　$(0,\ -1)$

(3)　$y=x^3+4$　$(-2,\ -4)$　(4)　$y=5x-x^3$　$(2,\ 2)$

解答　(1)　$y=-x+1$　(2)　$y=4x-1$　(3)　$y=12x+20$　(4)　$y=-7x+16$

解説

与えられた曲線について，$y=f(x)$ とおく。

(1)　$f'(x)=2x-3$

よって，点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きは　$f'(1)=2\cdot 1-3=-1$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y-0=-1\cdot(x-1)$　すなわち　$y=-x+1$

(2)　$f'(x)=-4x+4$

よって，点 $(0,\ -1)$ における接線の傾きは　$f'(0)=-4\cdot 0+4=4$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y+1=4(x-0)$　すなわち　$y=4x-1$

(3)　$f'(x)=3x^2$

よって，点 $(-2,\ -4)$ における接線の傾きは　$f'(-2)=3\cdot(-2)^2=12$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y+4=12(x+2)$　すなわち　$y=12x+20$

(4)　$f'(x)=5-3x^2$

よって，点 $(2,\ 2)$ における接線の傾きは　$f'(2)=5-3\cdot 2^2=-7$

ゆえに，求める接線の方程式は

$y-2=-7(x-2)$　すなわち　$y=-7x+16$