数学演習（微分法）Ｈ２４．６．１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

(1)　関数 $f(x)=-3x+1$ の，$x=0$ から $x=3$ までの平均変化率

(2)　関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の，$x=-1$ から $x=3$ までの平均変化率

(3)　関数 $f(x)=x^3+x$ の，$x=1$ から $x=2$ までの平均変化率

(4)　関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

2．次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(-3+h)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)$

(3)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{-4h+h^2}{h}$　　(4)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h^2+12h}{h}$

3．定義に従って，次の関数の与えられた x の値における微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x-3$　$(x=0)$　　(2)　$f(x)=x^2-3x+2$　$(x=1)$

(3)　$f(x)=-x^2+4x+5$　$(x=-2)$　　(4)　$f(x)=x^3+3x$　$(x=3)$

4．関数 $y=x^2-4x$ のグラフ上の，次の各点における接線の傾きを求めよ。

(1)　$(1,\ -3)$　　(2)　$(-2,\ 12)$　　(3)　$(2,\ -4)$

5．次の極限値を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3(-a+h)^2-3a^2}{h}$

6．定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=-2x+3$　　(2)　$f(x)=x^2-4x+1$　　(3)　$f(x)=x^3+2x$

7．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-6$　(2)　$y=2x-1$　(3)　$y=-3x^2+5x-2$

(4)　$y=x^3-5x^2-4$　(5)　$y=(2x-3)^2$　(6)　$y=(x-1)(x+2)$

(7)　$y=(x^2+1)(x-4)$　(8)　$y=x(x-2)(x+3)$

8．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=3x^4$　(2)　$y=x^4-3x^2+1$　(3)　$y=-x^4+2x^3+5$

9．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-\dfrac{x^2}{2}+3$　(2)　$y=-x^2+x^3$　(3)　$y=2(x+5)(x-1)$

(4)　$y=(x+1)(2x^2-x+1)$　(5)　$y=(x+2)^3$

10. 次の関数を［　］内で示された変数について微分せよ。

(1)　$s=4.9t^2+3t+4$　$[t]$　(2)　$V=\pi r^3+10\pi r$　$[r]$

11. 次の関数について，与えられた微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=-2x^2+4x-3$，$f'(1)$　(2)　$f(x)=x^3+4x-3$，$f'(2)$

12. 3つの条件 $f'(1)=1$，$f'(2)=5$，$f(0)=4$ を満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

数学演習（微分法）Ｈ２４．６．１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．次の平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

(1)　関数 $f(x)=-3x+1$ の，$x=0$ から $x=3$ までの平均変化率

(2)　関数 $f(x)=x^2-2x+2$ の，$x=-1$ から $x=3$ までの平均変化率

(3)　関数 $f(x)=x^3+x$ の，$x=1$ から $x=2$ までの平均変化率

(4)　関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

解答　(1)　-3　(2)　0　(3)　8　(4)　$2(b+a)$

解説

(1)　$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{-8-1}{3}=-3$

(2)　$\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{5-5}{4}=0$

(3)　$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{10-2}{1}=8$

(4)　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{2b^2-2a^2}{b-a}=\dfrac{2(b+a)(b-a)}{b-a}=2(b+a)$

２．次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim\limits_{h\to 0}(-3+h)$　(2)　$\lim\limits_{h\to 0}(3+3h+h^2)$

(3)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4h+h^2}{h}$　(4)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+6h^2+12h}{h}$

解答　(1)　-3　(2)　3　(3)　-4　(4)　12

解説

(1)　$\lim\limits_{h\to 0}(-3+h)=-3$

(2)　$\lim\limits_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$

(3)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(-4+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-4+h)=-4$

(4)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+6h^2+12h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h^2+6h+12)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h^2+6h+12)=12$

３．定義に従って，次の関数の与えられた x の値における微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x-3$　$(x=0)$　(2)　$f(x)=x^2-3x+2$　$(x=1)$

(3)　$f(x)=-x^2+4x+5$　$(x=-2)$　(4)　$f(x)=x^3+3x$　$(x=3)$

解答　(1)　2　(2)　-1　(3)　8　(4)　30

解説

(1)　$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2h-3)-(2\cdot 0-3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h}=2$

(2)　$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(1+h)^2-3(1+h)+2\}-0}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-1+h)=-1$

(3)　$f'(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{-(-2+h)^2+4(-2+h)+5\}-(-7)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{8h-h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(8-h)=8$

(4)　$f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(3+h)^3+3(3+h)\}-36}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{30h+9h^2+h^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(30+9h+h^2)=30$

４．関数 $y=x^2-4x$ のグラフ上の，次の各点における接線の傾きを求めよ。

(1)　$(1,\ -3)$　(2)　$(-2,\ 12)$　(3)　$(2,\ -4)$

解答　(1)　-2　(2)　-8　(3)　0

解説

$f(x)=x^2-4x$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しい。

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{(a+h)^2-4(a+h)\}-(a^2-4a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2a-4)h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2a-4+h)=2a-4$$

(1)　$f'(1)=2\cdot 1-4=-2$

(2)　$f'(-2)=2\cdot(-2)-4=-8$

(3)　$f'(2)=2\cdot 2-4=0$

５．次の極限値を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}$　(2)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(-a+h)^2-3a^2}{h}$

解答　(1)　3　(2)　$-6a$

解説

(1)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-1+3h-3h^2+h^3)+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h-3h^2+h^3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(3-3h+h^2)=3$

(2)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(-a+h)^2-3a^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(a^2-2ah+h^2)-3a^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-6ah+3h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(-6a+3h)=-6a$

６．定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=-2x+3$　(2)　$f(x)=x^2-4x+1$　(3)　$f(x)=x^3+2x$

解答　(1)　$f'(x)=-2$　(2)　$f'(x)=2x-4$　(3)　$f'(x)=3x^2+2$

解説

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(1)　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{-2(x+h)+3\}-(-2x+3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2h}{h}=-2$

(2)　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2-4(x+h)+1\}-(x^2-4x+1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2x-4)h+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2x-4+h)=2x-4$

(3)　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^3+2(x+h)\}-(x^3+2x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3x^2+2)h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+2+3xh+h^2)=3x^2+2$

7．次の関数を微分せよ。

(1) $y=-6$ (2) $y=2x-1$ (3) $y=-3x^2+5x-2$

(4) $y=x^3-5x^2-4$ (5) $y=(2x-3)^2$ (6) $y=(x-1)(x+2)$

(7) $y=(x^2+1)(x-4)$ (8) $y=x(x-2)(x+3)$

解答 (1) $y'=0$ (2) $y'=2$ (3) $y'=-6x+5$ (4) $y'=3x^2-10x$
(5) $y'=8x-12$ (6) $y'=2x+1$ (7) $y'=3x^2-8x+1$
(8) $y'=3x^2+2x-6$

解説

(1) $y'=0$

(2) $y'=2$

(3) $y'=-3\cdot 2x+5=-6x+5$

(4) $y'=3x^2-5\cdot 2x=3x^2-10x$

(5) $y=4x^2-12x+9$ であるから $y'=4\cdot 2x-12=8x-12$

(6) $y=x^2+x-2$ であるから $y'=2x+1$

(7) $y=x^3-4x^2+x-4$ であるから $y'=3x^2-4\cdot 2x+1=3x^2-8x+1$

(8) $y=x^3+x^2-6x$ であるから $y'=3x^2+2x-6$

8．次の関数を微分せよ。

(1) $y=3x^4$ (2) $y=x^4-3x^2+1$ (3) $y=-x^4+2x^3+5$

解答 (1) $y'=12x^3$ (2) $y'=4x^3-6x$ (3) $y'=-4x^3+6x^2$

解説

(1) $y'=3\cdot 4x^3=12x^3$

(2) $y'=4x^3-3\cdot 2x=4x^3-6x$

(3) $y'=-4x^3+2\cdot 3x^2=-4x^3+6x^2$

9．次の関数を微分せよ。

(1) $y=-\dfrac{x^2}{2}+3$ (2) $y=-x^2+x^3$ (3) $y=2(x+5)(x-1)$

(4) $y=(x+1)(2x^2-x+1)$ (5) $y=(x+2)^3$

解答 (1) $y'=-x$ (2) $y'=-2x+3x^2$ (3) $y'=4x+8$ (4) $y'=6x^2+2x$
(5) $y'=3x^2+12x+12$

解説

(1) $y'=-\dfrac{1}{2}\cdot 2x=-x$

(2) $y'=-2x+3x^2$

(3) $y=2x^2+8x-10$ であるから $y'=2\cdot 2x+8=4x+8$

(4) $y=2x^3+x^2+1$ であるから $y'=2\cdot 3x^2+2x=6x^2+2x$

(5) $y=x^3+6x^2+12x+8$ であるから $y'=3x^2+6\cdot 2x+12=3x^2+12x+12$

10. 次の関数を[ ]内で示された変数について微分せよ。

(1) $s=4.9t^2+3t+4$ [t] (2) $V=\pi r^3+10\pi r$ [r]

解答 (1) $9.8t+3$ (2) $3\pi r^2+10\pi$

解説

(1) $\dfrac{ds}{dt}=4.9\cdot 2t+3=9.8t+3$

(2) $\dfrac{dV}{dr}=\pi\cdot 3r^2+10\pi=3\pi r^2+10\pi$

11. 次の関数について，与えられた微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=-2x^2+4x-3$，$f'(1)$ (2) $f(x)=x^3+4x-3$，$f'(2)$

解答 (1) $f'(1)=0$ (2) $f'(2)=16$

解説

(1) $f'(x)=-2\cdot 2x+4=-4x+4$

よって $f'(1)=-4\cdot 1+4=0$

(2) $f'(x)=3x^2+4$

よって $f'(2)=3\cdot 2^2+4=16$

12. 3つの条件 $f'(1)=1$，$f'(2)=5$，$f(0)=4$ を満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

解答 $f(x)=2x^2-3x+4$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると $f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=1$ から $2a+b=1$

$f'(2)=5$ から $4a+b=5$

$f(0)=4$ から $c=4$

これを解いて $a=2$，$b=-3$，$c=4$

よって $f(x)=2x^2-3x+4$