数学演習（微分法の応用）Ｒ１．１０．２５　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=x^3-6x^2+10$ $(-2\leqq x\leqq 3)$　　(2) $y=3x^4-4x^3-12x^2$ $(-1\leqq x\leqq 3)$

$\boxed{2}$ 半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ。また，そのときの円柱の高さを求めよ。

$\boxed{3}$ a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ $f(x)=x^3-6x^2+9x$ とする。区間 $a\leqq x\leqq a+1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=2\sin x\sin 2x-\cos x+2$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{6}$ (1) 関数 $y=8^x-3\cdot 2^x$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) 関数 $y=\log_3 x+2\log_3(6-x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{7}$ $0<a<3$ とする。関数 $f(x)=2x^3-3ax^2+b\ (0\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 10，最小値が -18 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{8}$ k は実数の定数とする。方程式 $2x^3-12x^2+18x+k=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

$\boxed{9}$ 3 次方程式 $x^3-3a^2x+4a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$ 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $x>2$ のとき　$x^3+16>12x$

(2) $x>0$ のとき　$x^4-16\geqq 32(x-2)$

$\boxed{11}$ 定数 a に対し，関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。a が実数全体を動くときの $M(a)$ の最小値を求めよ。

数学演習（微分法の応用）Ｒ１．１０．２５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^3-6x^2+10\ (-2\leqq x\leqq 3)$　　　(2)　$y=3x^4-4x^3-12x^2\ (-1\leqq x\leqq 3)$

解答　(1)　$x=0$ で最大値 10，$x=-2$ で最小値 -22

(2)　$x=3$ で最大値 27，$x=2$ で最小値 -32

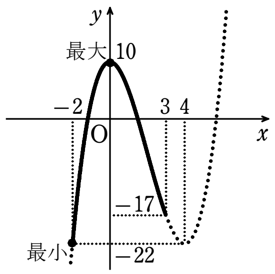
解説

(1)　$y'=3x^2-12x=3x(x-4)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 4$

区間 $-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-22	↗	極大 10	↘	-17



よって　$x=0$ で最大値 10，

$x=-2$ で最小値 -22

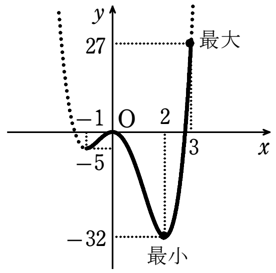
(2)　$y'=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$

$=12x(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 0,\ 2$

区間 $-1\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	↗	極大 0	↘	極小 -32	↗	27



よって　$x=3$ で最大値 27，$x=2$ で最小値 -32

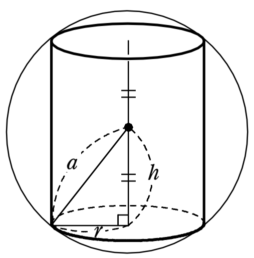
2 半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ。また，そのときの円柱の高さを求めよ。

解答　体積の最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$，そのときの円柱の高さ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

解説

円柱の高さを $2h\ (0<2h<2a)$ とし，底面の半径を r とすると　　$r^2=a^2-h^2$

$0<2h<2a$ から　　$0<h<a$



円柱の体積を V とすると

$V=\pi r^2\cdot 2h=2\pi(a^2-h^2)h$

$=-2\pi(h^3-a^2h)$

V を h で微分すると

$V'=-2\pi(3h^2-a^2)$

$=-2\pi(\sqrt{3}h+a)(\sqrt{3}h-a)$

$0<h<a$ において，$V'=0$ となるのは，$h=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のときである。

ゆえに，$0<h<a$ における V の増減表は，右のようになる。

h	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	a
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

したがって，V は $h=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のとき最大となる。

$h=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のとき，円柱の高さは　　$2\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

体積は　　$2\pi\left(a^2-\dfrac{a^2}{3}\right)\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$

よって　　体積の最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$，そのときの円柱の高さ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

3 a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

解答　$0<a<\dfrac{3}{4}$，$3<a$ のとき　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$

解説

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

$=(3x-a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{a}{3},\ a$

$a>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{4}{27}a^3$	↘	極小 0	↗

ここで，$x=\dfrac{a}{3}$ 以外に $f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ を満たす x の値を求めると，$f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ から　　$x^3-2ax^2+a^2x-\dfrac{4}{27}a^3=0$

ゆえに　$\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)=0$　　$x\neq\dfrac{a}{3}$ であるから　　$x=\dfrac{4}{3}a$

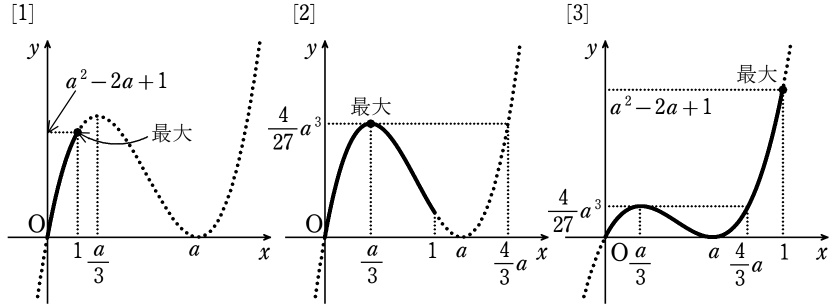
したがって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ は

[1]　$1<\dfrac{a}{3}$　すなわち　$a>3$ のとき　　$M(a)=f(1)$

[2]　$\dfrac{a}{3}\leqq 1\leqq\dfrac{4}{3}a$　すなわち　$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　　$M(a)=f\left(\dfrac{a}{3}\right)$

[3]　$0<\dfrac{4}{3}a<1$　すなわち　$0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき　　$M(a)=f(1)$

[1]　[2]　[3]



以上から　$0<a<\dfrac{3}{4}$，$3<a$ のとき　　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$

4 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ とする。区間 $a\leqq x\leqq a+1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

解答　$a<0$，$\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}\leqq a$ のとき　$M(a)=a^3-3a^2+4$；

$0\leqq a<1$ のとき　$M(a)=4$；$1\leqq a<\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$ のとき　$M(a)=a^3-6a^2+9a$

解説

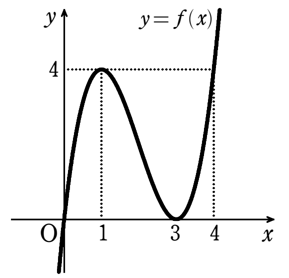
$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ 3$

増減表から，$y=f(x)$ のグラフは図のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



[1]　$a+1<1$　すなわち　$a<0$ のとき

$M(a)=f(a+1)$

$=(a+1)^3-6(a+1)^2+9(a+1)$

$=a^3-3a^2+4$

[2]　$a<1\leqq a+1$　すなわち　$0\leqq a<1$ のとき

$M(a)=f(1)=4$

次に，$2<\alpha<3$ のとき，$f(\alpha)=f(\alpha+1)$ とすると

$\alpha^3-6\alpha^2+9\alpha=\alpha^3-3\alpha^2+4$

ゆえに　　$3\alpha^2-9\alpha+4=0$

よって　　$\alpha=\dfrac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3}=\dfrac{9\pm\sqrt{33}}{6}$

$2<\alpha<3$ であるから，$5<\sqrt{33}<6$ に注意して　　$\alpha=\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$

[3]　$1\leqq a<\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$ のとき　　$M(a)=f(a)=a^3-6a^2+9a$

[4]　$\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}\leqq a$ のとき　　$M(a)=f(a+1)=a^3-3a^2+4$

以上から　　$a<0$，$\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}\leqq a$ のとき　　$M(a)=a^3-3a^2+4$；

$0\leqq a<1$ のとき　$M(a)=4$；

$1\leqq a<\dfrac{9+\sqrt{33}}{6}$ のとき　　$M(a)=a^3-6a^2+9a$

5 $0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=2\sin x\sin 2x-\cos x+2$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 3；$x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ で最小値 1

解説

$y=2\sin x\cdot 2\sin x\cos x-\cos x+2$

$=4\sin^2 x\cos x-\cos x+2=4(1-\cos^2 x)\cos x-\cos x+2$

$=-4\cos^3 x+3\cos x+2$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$

y を t の式で表すと，$y=-4t^3+3t+2$ であり

$y'=-12t^2+3=-3(4t^2-1)$

$=-3(2t+1)(2t-1)$

$y'=0$ とすると　$t=\pm\frac{1}{2}$

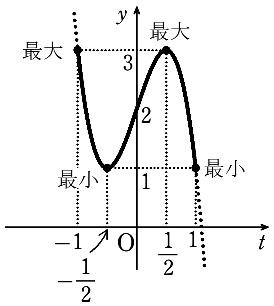
$-1\leqq t\leqq 1$ における y の増減表は右のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	↘	極小 1	↗	極大 3	↘	1

よって

$t=-1,\ \frac{1}{2}$ のとき最大値 3

$t=-\frac{1}{2},\ 1$ のとき最小値 1



$t=-1$ のとき $x=\pi$；　$t=\frac{1}{2}$ のとき $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$；

$t=-\frac{1}{2}$ のとき $x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$；　$t=1$ のとき $x=0$

したがって　$x=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最大値 3

$x=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ で最小値 1

6 (1)　関数 $y=8^x-3\cdot 2^x$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=\log_3 x+2\log_3(6-x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　(1)　$x=0$ のとき最小値 -2　　(2)　$x=2$ のとき最大値 $5\log_3 2$

解説

(1)　$y=(2^x)^3-3\cdot 2^x$

$2^x=t$ とおくと　$t>0$　…… ①

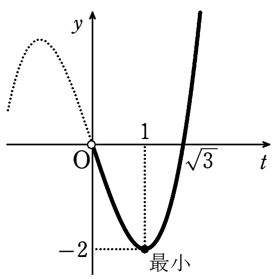
y を t の式で表すと，$y=t^3-3t$ であり　$y'=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$y'=0$ とすると　$t=-1,\ 1$

① の範囲における y の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小 -2	↗

よって，y は $t=1$ のとき最小値 -2 をとる。



$t=1$ のとき，$2^x=1$ すなわち $2^x=2^0$ から　$x=0$

したがって　$x=0$ のとき最小値 -2

(2)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$6-x>0$

すなわち　$0<x<6$　…… ②

このとき　$y=\log_3 x+\log_3(6-x)^2=\log_3 x(6-x)^2$

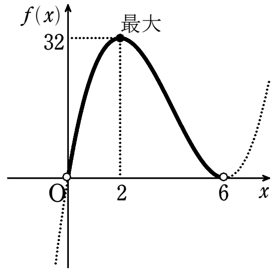
$f(x)=x(6-x)^2=x^3-12x^2+36x$ とすると　$y=\log_3 f(x)$

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x^2-8x+12)=3(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=2,\ 6$

② の範囲における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大 32	↘	



よって，$f(x)$ は $x=2$ で最大値 32 をとり，

底 3 は 1 より大きいから，このとき y も最大となる。

ゆえに，y は $x=2$ のとき最大値 $\log_3 32=5\log_3 2$ をとる。

7 $0<a<3$ とする。関数 $f(x)=2x^3-3ax^2+b\ (0\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 10，最小値が -18 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=1,\ b=-17$

解説

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ a$

$0<a<3$ であるから，$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↘	極小 $b-a^3$	↗	$b-27a+54$

よって，最小値は　$f(a)=b-a^3$ であり　$b-a^3=-18$　…… ①

また，　最大値は　$f(0)=b$　または　$f(3)=b-27a+54$

$f(0)$ と $f(3)$ を比較すると　$f(3)-f(0)=-27a+54=-27(a-2)$

ゆえに　$0<a<2$ のとき　$f(0)<f(3)$，　$2\leqq a<3$ のとき　$f(3)\leqq f(0)$

[1]　$0<a<2$ のとき，最大値は　$f(3)=b-27a+54$

よって　$b-27a+54=10$　すなわち　$b=27a-44$

これを ① に代入して整理すると　$a^3-27a+26=0$

ゆえに　$(a-1)(a^2+a-26)=0$　　よって　$a=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{105}}{2}$

$0<a<2$ を満たすものは　$a=1$

このとき，① から　$b=-17$

[2]　$2\leqq a<3$ のとき，最大値は　$f(0)=b$

よって　$b=10$

これを ① に代入して整理すると　$a^3=28$

$28>3^3$ であるから，$a=\sqrt[3]{28}>3$ となり，不適。

[1]，[2] から　$a=1,\ b=-17$

8 k は実数の定数とする。方程式 $2x^3-12x^2+18x+k=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

解答　$k<-8,\ k>0$ のとき 1 個；$k=-8,\ 0$ のとき 2 個；$-8<k<0$ のとき 3 個

解説

$2x^3-12x^2+18x+k=0$ から　$-2x^3+12x^2-18x=k$

$f(x)=-2x^3+12x^2-18x$ とすると

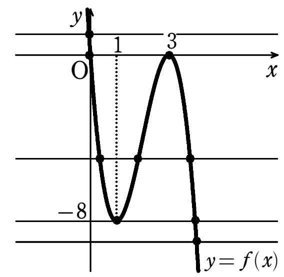
$f'(x)=-6x^2+24x-18=-6(x^2-4x+3)$

$=-6(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 3$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，

方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する。

したがって，グラフから，異なる実数解の個数は

$k<-8,\ k>0$ のとき 1 個；$k=-8,\ 0$ のとき 2 個；$-8<k<0$ のとき 3 個

9 3 次方程式 $x^3-3a^2x+4a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<a$

解説

$f(x)=x^3-3a^2x+4a$ とする。

3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつから，3 次関数 $f(x)$ は極値をもち，極大値と極小値が異符号になる。

ここで，$f(x)$ が極値をもつことから，2 次方程式 $f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm a$　　よって　$a\neq 0$

このとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

$a>0$ の場合

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$a<0$ の場合

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(-a)f(a)<0$ から　$(2a^3+4a)(-2a^3+4a)<0$　すなわち　$4a^2(a^2+2)(a^2-2)>0$

$4a^2(a^2+2)>0$ であるから　$a^2-2>0$

したがって　$a<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<a$

10 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x>2$ のとき　$x^3+16>12x$　　(2)　$x>0$ のとき　$x^4-16\geqq 32(x-2)$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(x)=(x^3+16)-12x$ とすると

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm 2$

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	↗

よって，$x>2$ のとき　$f(x)>0$

したがって　$x^3+16>12x$

別解　$x>2$ のとき　$f'(x)>0$

ゆえに，$x>2$ のとき $f(x)$ は単調に増加する。

よって，$x>2$ のとき　$f(x)>f(2)=0$　すなわち　$f(x)>0$

(2)　$f(x)=(x^4-16)-32(x-2)$ とすると

$$f'(x)=4x^3-32=4(x^3-8)=4(x-2)(x^2+2x+4)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=2$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小 0	↗

ゆえに，$x>0$ のとき，$f(x)$ は

$x=2$ で最小値 0

をとる。

よって，$x>0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

したがって　$x^4-16\geqq 32(x-2)$

$\boxed{11}$ 定数 a に対し，関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。a が実数全体を動くときの $M(a)$ の最小値を求めよ。

解答　$a=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$

解説

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$　　$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm a$

[1]　$a=0$ の場合　$f'(x)=3x^2\geqq 0$

$f(x)$ は常に単調に増加するから　$M(a)=f(1)=1$

[2]　$0<a<1$ の場合

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1+3a^2$	↗	極大 $2a^3$	↘	極小 $-2a^3$	↗	$1-3a^2$

ゆえに，最大値は　$f(-a)=2a^3$ または $f(1)=1-3a^2$

ここで　$f(-a)-f(1)=2a^3-(1-3a^2)=(a+1)^2(2a-1)$

よって　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$M(a)=f(1)=1-3a^2$

$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき　$M(a)=f(-a)=2a^3$

[3]　$1\leqq a$ の場合　$-1\leqq x\leqq 1$ において　$f'(x)\leqq 0$

ゆえに，$-1\leqq x\leqq 1$ で $f(x)$ は単調に減少する。

よって　$M(a)=f(-1)=-1+3a^2$

[4]　$a<0$ の場合

[2], [3] において，a の代わりに $-a$，$-a$ の代わりに a と考えればよい。

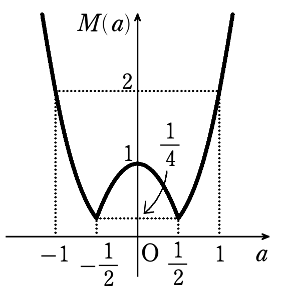
したがって，この場合の最大値は

$-\dfrac{1}{2}<a<0$ のとき　$M(a)=f(1)=1-3a^2$

$-1<a\leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$M(a)=f(a)=-2a^3$

$a\leqq -1$ のとき　$M(a)=f(-1)=-1+3a^2$

以上から，$y=M(a)$ のグラフは右の図のようになる。



よって，図から，$M(a)$ は $a=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，

最小値は　$M\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)=\pm 2\cdot\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$　(複号同順)