数学演習（接線の方程式•関数の増減•最大最小）Ｈ２４．９．１０　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１. x 座標が与えられた，次の曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

(1) $y=-2x^2+1$　$(x=1)$　　(2) $y=x^3-3x$　$(x=1)$

(3) $y=x^3+x^2-2$　$(x=-1)$　　(4) $y=-x^3+4x$　$(x=0)$

２. 曲線 C : $y=x^3+3x^2-5x+4$ 上の x 座標が 1 である点を P とする。

(1) 点 P における曲線 C の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 点 P における曲線 C の接線 ℓ と垂直な直線 m の方程式を求めよ。

３. 次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-3x+4$　$(0,\ 0)$　　(2) $y=-x^2+x-3$　$(1,\ 1)$

(3) $y=x^3+4$　$(0,\ -12)$

４. 次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 曲線 $y=-x^2+4x+5$ について，傾きが 2 である接線

(2) 曲線 $y=x^3-x^2$ について，直線 $y=x+1$ に平行な接線

５. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a+1)x$ が $x=1$ で極値をもつとき，定数 a の値と $f(x)$ の極小値を求めよ。

6．次の関数の極値を求め，グラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x^2-9x+11$　　(2)　$y=(x-1)^2(x+2)$

(3)　$y=-x^3+6x^2-12x+8$　　(4)　$y=-2x^3+12x^2-18x$

7．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき，定数 a，b の値と $f(x)$ の極大値を求めよ。

8．関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が，すべての実数の範囲で常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9．次の条件を満たすような，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が極値をもつ。

(2)　関数 $g(x)=x^3-x^2+ax+2$ が極値をもたない。

10．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^3-12x$　$(-3\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=x^3-3x^2+4$　$(-2\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x^3-6x^2+9x$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(4)　$y=-2x^3+3x^2+12x-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

１．x 座標が与えられた，次の曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=-2x^2+1$　$(x=1)$　　(2)　$y=x^3-3x$　$(x=1)$

(3)　$y=x^3+x^2-2$　$(x=-1)$　　(4)　$y=-x^3+4x$　$(x=0)$

解答　(1)　$y=-4x+3$　(2)　$y=-2$　(3)　$y=x-1$　(4)　$y=4x$

(1)　$y'=-4x$ であるから，$x=1$ における接線の傾きは　$-4\cdot1=-4$

$x=1$ のとき　$y=-1$ であるから，接線の方程式は傾きが-4で点$(1,\ -1)$を通るから

$y-(-1)=-4(x-1)$

すなわち　$y=-4x+3$

(2)　$y'=3x^2-3$ であるから，$x=1$ における接線の傾きは　$3\cdot1^2-3=0$

$x=1$ のとき　$y=-2$ であるから，接線の方程式は傾きが0で点$(1,\ -2)$を通るから

$y-(-2)=0\cdot(x-1)$

すなわち　$y=-2$

(3)　$y'=3x^2+2x$ であるから，$x=-1$ における接線の傾きは

$3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)=1$

$x=-1$ のとき　$y=-2$ であるから，接線の方程式は傾きが1で点$(-1,\ -2)$を通るから

$y-(-2)=x-(-1)$

すなわち　$y=x-1$

(4)　$y'=-3x^2+4$ であるから，$x=0$ における接線の傾きは　$-3\cdot0^2+4=4$

$x=0$ のとき　$y=0$ であるから，接線の方程式は傾きが4で原点を通るから

$y-0=4(x-0)$　より　$y=4x$

２．曲線 C：$y=x^3+3x^2-5x+4$ 上の x 座標が 1 である点を P とする。

(1)　点 P における曲線 C の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　点 P における曲線 C の接線 ℓ と垂直な直線 m の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=4x-1$　(2)　$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$

(1)　$y'=3x^2+6x-5$

点 P における接線 ℓ の傾きは　$3\cdot1^2+6\cdot1-5=4$

また，$x=1$ のとき $y=3$ であるから，接線 ℓ の方程式は　$y-3=4(x-1)$

すなわち　$y=4x-1$

(2)　直線 m の傾きを a とすると　$4a=-1$　ゆえに　$a=-\dfrac{1}{4}$

よって，直線 m の方程式は　$y-3=-\dfrac{1}{4}(x-1)$

すなわち　$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$

参考　この直線 m を，点 P における曲線 C の法線という。

３．次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+4$　$(0,\ 0)$　　(2)　$y=-x^2+x-3$　$(1,\ 1)$

(3)　$y=x^3+4$　$(0,\ -12)$

解答　順に　(1)　$y=-7x$，$(-2,\ 14)$；$y=x$，$(2,\ 2)$

(2)　$y=3x-2$，$(-1,\ -5)$；$y=-5x+6$，$(3,\ -9)$

(3)　$y=12x-12$，$(2,\ 12)$

(1)　$y'=2x-3$

接点の座標を $(a,\ a^2-3a+4)$ とすると，接線の方程式は

$y-(a^2-3a+4)=(2a-3)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-3)x-a^2+4$　……①

この直線が点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0=(2a-3)\cdot0-a^2+4$

これを解いて　$a=\pm2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 2)$

①から，接線の方程式は　$y=x$

$a=-2$ のとき，接点の座標は　$(-2,\ 14)$

①から，接線の方程式は　$y=-7x$

(2)　$y'=-2x+1$

接点の座標を $(a,\ -a^2+a-3)$ とすると，接線の方程式は

$y-(-a^2+a-3)=(-2a+1)(x-a)$

すなわち　$y=(-2a+1)x+a^2-3$　……①

この直線が点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=(-2a+1)\cdot1+a^2-3$

よって　$a^2-2a-3=0$

これを解いて　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -5)$

①から，接線の方程式は　$y=3x-2$

$a=3$ のとき，接点の座標は　$(3,\ -9)$

①から，接線の方程式は　$y=-5x+6$

(3)　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+4)$ とすると，接線の方程式は

$y-(a^3+4)=3a^2(x-a)$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3+4$　……①

この直線が点 $(0,\ -12)$ を通るから　$-12=3a^2\cdot0-2a^3+4$

よって　$a^3=8$

a は実数であるから　$a=2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 12)$

①から，接線の方程式は　$y=12x-12$

４．次のような接線の方程式を求めよ。

(1)　曲線 $y=-x^2+4x+5$ について，傾きが 2 である接線

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ について，直線 $y=x+1$ に平行な接線

解答　(1)　$y=2x+6$　(2)　$y=x-1$，$y=x+\dfrac{5}{27}$

(1)　$y'=-2x+4$

接点の x 座標は，接線の傾きが 2 であるから　$-2x+4=2$　よって　$x=1$

$x=1$ のとき $y=8$ であるから，接点の座標は　$(1,\ 8)$

よって，求める接線の方程式は　$y-8=2(x-1)$　すなわち　$y=2x+6$

(2)　$y'=3x^2-2x$

直線 $y=x+1$ の傾きは 1 であるから，これと平行な接線の傾きも 1 である。

接点の x 座標は，$3x^2-2x=1$ を解くと

整理して　$3x^2-2x-1=0$

ゆえに　$(x-1)(3x+1)=0$

よって　$x=1,\ -\dfrac{1}{3}$

$x=1$ のとき　$y=0$ であるから，接線の方程式は　$y=x-1$

$x=-\dfrac{1}{3}$ のとき　$y=-\dfrac{4}{27}$ であるから，接線の方程式は

$y-\left(-\dfrac{4}{27}\right)=x-\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

すなわち　$y=x+\dfrac{5}{27}$

５．関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a+1)x$ が $x=1$ で極値をもつとき，定数 a の値と $f(x)$ の極小値を求めよ。

解答　$a=2$，$x=3$ のとき極小値 0

$f'(x)=x^2-2ax+a+1$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるから　$f'(1)=0$

ゆえに　$-a+2=0$　よって　$a=2$

このとき　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$

$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{4}{3}$	↘	極小 0	↗

以上から　$a=2$，$x=3$ のとき極小値 0

６．次の関数の極値を求め，グラフをかけ。

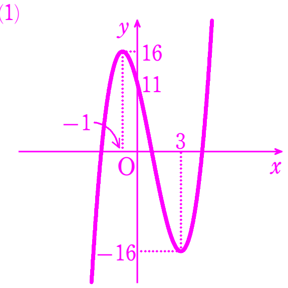
(1)　$y=x^3-3x^2-9x+11$　　(2)　$y=(x-1)^2(x+2)$

(3)　$y=-x^3+6x^2-12x+8$　　(4)　$y=-2x^3+12x^2-18x$

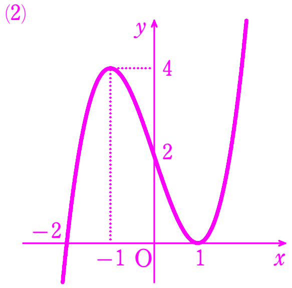
解答　(1)　$x=-1$ のとき極大値 16，$x=3$ のとき極小値 -16，［図］

(2)　$x=-1$ のとき極大値 4，$x=1$ のとき極小値 0，［図］

(1)



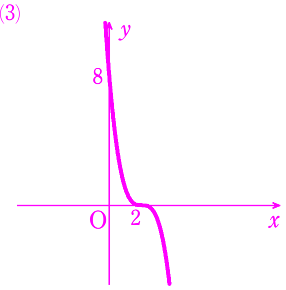
(2)



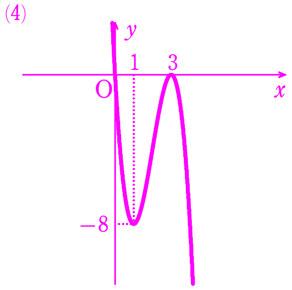
(3)　極値なし，［図］

(4)　$x=1$ のとき極小値 -8，$x=3$ のとき極大値 0，［図］

(3)



(4)

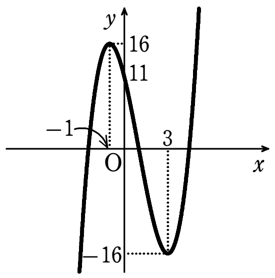


(1)　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

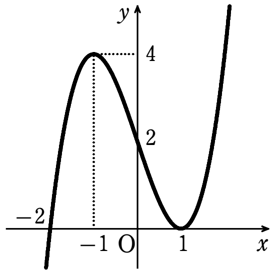
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗



よって，$x=-1$ のとき極大値 16,
　　$x=3$ のとき極小値 -16　をとる。
また，グラフは[図]

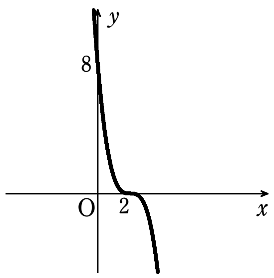
(2)　展開して $y=x^3-3x+2$ であるから　　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$y'=0$ とすると　　$x=\pm1$
y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



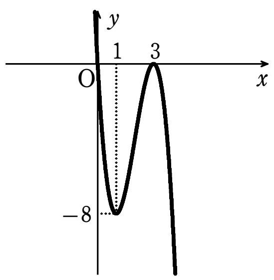
よって，$x=-1$ のとき極大値 4,
　　$x=1$ のとき極小値 0　をとる。
また，グラフは[図]

(3)　$y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$
常に $y'\leqq0$ であるから，y は常に減少し，
極値をもたない。
また，$x=2$ のとき　$y=0$
したがって，グラフは[図]



(4)　$y'=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$
$y'=0$ とすると　　$x=1,\ 3$
y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘



よって，$x=1$ のとき極小値 -8,
　　$x=3$ のとき極大値 0　をとる。
また，グラフは[図]

7．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき，定数 a，b の値と $f(x)$ の極大値を求めよ。

解答　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ のとき極大値 6

$f'(x)=3x^2-6x+a$
$x=3$ で極小値 -26 をとるから　　$f'(3)=0$，$f(3)=-26$
よって　　$9+a=0$，$3a+b=-26$
これを解いて　　$a=-9$，$b=1$
このとき　　$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$
　　　　　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 6	↘	極小 -26	↗

以上から　　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ のとき極大値 6

8．関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が，すべての実数の範囲で常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-6\leqq a\leqq6$

$f'(x)=3x^2+2ax+12$
$f(x)$ がすべての実数の範囲で常に増加するための条件は
　　$f'(x)\geqq0$　すなわち　$3x^2+2ax+12\geqq0$
が常に成り立つことである。
ゆえに，2 次方程式 $3x^2+2ax+12=0$ の判別式 D について　　$D\leqq0$
$\dfrac{D}{4}=a^2-36=(a+6)(a-6)$ であるから　　$(a+6)(a-6)\leqq0$
したがって　$-6\leqq a\leqq6$

9．次の条件を満たすような，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。
(1)　関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ が極値をもつ。
(2)　関数 $g(x)=x^3-x^2+ax+2$ が極値をもたない。

解答　(1)　$a<0$，$1<a$　　(2)　$a\geqq\dfrac{1}{3}$

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+3ax+1$ から　　$f'(x)=3x^2-6ax+3a$
$f(x)$ が極値をもつための条件は，2 次方程式 $3x^2-6ax+3a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。
ゆえに，判別式 D について　　$D>0$
$\dfrac{D}{4}=(-3a)^2-3\cdot3a=9a(a-1)$ であるから　　$9a(a-1)>0$
したがって　　$a<0$，$1<a$
(2)　$g(x)=x^3-x^2+ax+2$ から　　$g'(x)=3x^2-2x+a$
$g(x)$ が極値をもたないための条件は，2 次方程式 $3x^2-2x+a=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたないことである。
よって，判別式 D について　　$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-3a\leqq0$
ゆえに　　$a\geqq\dfrac{1}{3}$

10．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。
(1)　$y=x^3-12x$　　$(-3\leqq x\leqq3)$
(2)　$y=x^3-3x^2+4$　$(-2\leqq x\leqq3)$
(3)　$y=x^3-6x^2+9x$　$(-1\leqq x\leqq2)$
(4)　$y=-2x^3+3x^2+12x-3$　$(-2\leqq x\leqq1)$

解答　(1)　$x=-2$ のとき最大値 16，$x=2$ のとき最小値 -16
　　(2)　$x=0$，3 のとき最大値 4，$x=-2$ のとき最小値 -16
　　(3)　$x=1$ のとき最大値 4，$x=-1$ のとき最小値 -16
　　(4)　$x=1$ のとき最大値 10，$x=-1$ のとき最小値 -10

(1)　$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$y'=0$ とすると　　$x=\pm2$
$-3\leqq x\leqq3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	↗	16	↘	-16	↗	-9

よって，$x=-2$ のとき最大値 16,
　　$x=2$　のとき最小値 -16 をとる。

(2)　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$
$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 2$
$-2\leqq x\leqq3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-16	↗	4	↘	0	↗	4

よって，$x=0$，3 のとき最大値 4,
　　$x=-2$　のとき最小値 -16 をとる。

(3)　$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$y'=0$ とすると　　$x=1,\ 3$
$-1\leqq x\leqq2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-16	↗	4	↘	2

よって，$x=1$　のとき最大値 4,
　　$x=-1$ のとき最小値 -16 をとる。

(4)　$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$
$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$
$-2\leqq x\leqq1$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	-10	↗	10

よって，$x=1$　のとき最大値 10,
　　$x=-1$ のとき最小値 -10 をとる。