数学演習（微分係数と導関数）Ｒ１．１０．２２　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．関数 $y=3x^2-5x$ について，次のものを求めよ。

(1)　$x=3$ から $x=7$ まで変化するときの平均変化率

(2)　$x=2$ から $x=2+h$ $(h \fallingdotseq 0)$ まで変化するときの平均変化率

(3)　$x=2$ における微分係数

(4)　放物線 $y=3x^2-5x$ の $x=c$ における接線の傾きが，(1) で求めた平均変化率の値に等しいとき，c の値

2．次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to -1}(x^3-2x+3)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$　　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

3．(1)　等式 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$ を満たす定数 a，b の値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

4．次の関数を微分せよ。ただし，(1)，(2) は導関数の定義に従って微分せよ。

(1)　$y=x^2+4x$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x}$

(3)　$y=4x^3-x^2-3x+5$　　(4)　$y=-3x^4+2x^3-5x^2+7$

5．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x+1)(x^2-3)$　　(2)　$y=(2x+1)^3$

(3)　$y=(x^2-2x+3)^2$　　(4)　$y=(4x-3)^2(2x+3)$

6．(1)　関数 $f(x)=2x^3+3x^2-8x$ について，$x=-2$ における微分係数を求めよ。

(2)　2 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$$f(1)=-3,\quad f'(1)=-1,\quad f'(0)=3$$

(3)　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が $2f(x)=(x+1)f'(x)+6$ を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ。

7．x についての整式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの余りを，a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

8．(1)　地上から真上に初速度 29.4 m/s で投げ上げられた物体の t 秒後の高さ h は，$h=29.4t-4.9t^2$ (m) で与えられる。この運動について，3 秒後の瞬間の速さを求めよ。

(2)　球の半径が 1 m から毎秒 10 cm の割合で大きくなるとき，30 秒後における球の表面積の変化率を求めよ。

9．(1)　次の条件を満たす 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(1)=f'(-1)=1,\quad f(1)=0,\quad f(-1)=2$$

(2)　等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

１．関数 $y=3x^2-5x$ について，次のものを求めよ。

(1)　$x=3$ から $x=7$ まで変化するときの平均変化率

(2)　$x=2$ から $x=2+h$ $(h\neq 0)$ まで変化するときの平均変化率

(3)　$x=2$ における微分係数

(4)　放物線 $y=3x^2-5x$ の $x=c$ における接線の傾きが，(1) で求めた平均変化率の値に等しいとき，c の値

解答　(1)　25　　(2)　$3h+7$　　(3)　7　　(4)　$c=5$

解説

$f(x)=3x^2-5x$ とする。

(1)　$\dfrac{f(7)-f(3)}{7-3}=\dfrac{(3\cdot7^2-5\cdot7)-(3\cdot3^2-5\cdot3)}{4}=\dfrac{112-12}{4}=25$

(2)　$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\dfrac{3(2+h)^2-5(2+h)-2}{h}=\dfrac{3h^2+7h}{h}=3h+7$

(3)　(2) から　$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(3h+7)=7$

(4)　$f'(c)=\lim\limits_{b\to c}\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=\lim\limits_{b\to c}\dfrac{3b^2-5b-(3c^2-5c)}{b-c}$

$=\lim\limits_{b\to c}\dfrac{(b-c)\{3(b+c)-5\}}{b-c}=\lim\limits_{b\to c}(3b+3c-5)=6c-5$

条件から　$f'(c)=25$　ゆえに　$6c-5=25$　よって　$c=5$

２．次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim\limits_{x\to-1}(x^3-2x+3)$　　(2)　$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$

(3)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x}\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)$　　(4)　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

解答　(1)　4　　(2)　$\dfrac{5}{7}$　　(3)　-2　　(4)　$\dfrac{1}{6}$

解説

(1)　$\lim\limits_{x\to-1}(x^3-2x+3)=(-1)^3-2\cdot(-1)+3=4$

(2)　$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+2}{x+4}=\dfrac{3+2}{3+4}=\dfrac{5}{7}$

(3)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x}\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{0-1}=-2$

(4)　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+8)-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\dfrac{1}{6}$

３．(1)　等式 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$ を満たす定数 a，b の値を求めよ。

(2)　$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

解答　(1)　$a=1$，$b=-2$　　(2)　$-3f'(a)$

解説

(1)　$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ であるから　$\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$

ゆえに　$1+a+b=0$　よって　$b=-a-1$　……①

このとき　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x+a+1)=a+2$

$a+2=3$ から　$a=1$　① から　$b=-2$

(2)　$h\longrightarrow0$ のとき，$-3h\longrightarrow0$ であるから

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-3h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\{a+(-3h)\}-f(a)}{-3h}\cdot(-3)=f'(a)\cdot(-3)$

$=-3f'(a)$

別解　$-3h=t$ とおくと，$h\longrightarrow0$ のとき $t\longrightarrow0$ であるから

(与式)$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{-\dfrac{t}{3}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}\cdot(-3)=-3f'(a)$

４．次の関数を微分せよ。ただし，(1)，(2) は導関数の定義に従って微分せよ。

(1)　$y=x^2+4x$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x}$

(3)　$y=4x^3-x^2-3x+5$　　(4)　$y=-3x^4+2x^3-5x^2+7$

解答　(1)　$y'=2x+4$　　(2)　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$　　(3)　$y'=12x^2-2x-3$

(4)　$y'=-12x^3+6x^2-10x$

解説

(1)　$y'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{(x+h)^2+4(x+h)\}-(x^2+4x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2+4(x+h)-4x}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2hx+h^2+4h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h+4)$

$=2x+4$

(2)　$\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)x}=\dfrac{-h}{(x+h)x}$ であるから

$y'=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{-h}{(x+h)x}\cdot\dfrac{1}{h}\right\}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-1}{(x+h)x}=-\dfrac{1}{x^2}$

(3)　$y'=(4x^3-x^2-3x+5)'=4(x^3)'-(x^2)'-3(x)'+(5)'$

$=4\cdot3x^2-2x-3\cdot1=12x^2-2x-3$

(4)　$y'=(-3x^4+2x^3-5x^2+7)'=-3(x^4)'+2(x^3)'-5(x^2)'+(7)'$

$=-3\cdot4x^3+2\cdot3x^2-5\cdot2x=-12x^3+6x^2-10x$

５．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x+1)(x^2-3)$　　(2)　$y=(2x+1)^3$

(3)　$y=(x^2-2x+3)^2$　　(4)　$y=(4x-3)^2(2x+3)$

解答　(1)　$y'=3x^2+2x-3$　　(2)　$y'=24x^2+24x+6$

(3)　$y'=4x^3-12x^2+20x-12$　　(4)　$y'=96x^2-54$

解説

(1)　右辺を展開すると　$y=x^3+x^2-3x-3$

よって　$y'=3x^2+2x-3\cdot1=3x^2+2x-3$

(2)　右辺を展開すると　$y=8x^3+12x^2+6x+1$

よって　$y'=8\cdot3x^2+12\cdot2x+6\cdot1=24x^2+24x+6$

(3)　右辺を展開すると　$y=x^4+4x^2+9-4x^3-12x+6x^2$

$=x^4-4x^3+10x^2-12x+9$

よって　$y'=4x^3-4\cdot3x^2+10\cdot2x-12\cdot1=4x^3-12x^2+20x-12$

(4)　右辺を展開すると　$y=(16x^2-24x+9)(2x+3)=32x^3-54x+27$

よって　$y'=32\cdot3x^2-54\cdot1=96x^2-54$

別解　(1)　$y'=(x+1)'(x^2-3)+(x+1)(x^2-3)'=1\cdot(x^2-3)+(x+1)\cdot2x$

$=3x^2+2x-3$

(2)　$y'=3(2x+1)^{3-1}(2x+1)'=3(2x+1)^2\cdot2=6(2x+1)^2$

(3)　$y'=2(x^2-2x+3)^{2-1}(x^2-2x+3)'=2(x^2-2x+3)\cdot(2x-2)$

$=4(x-1)(x^2-2x+3)$

(4)　$y'=\{(4x-3)^2\}'(2x+3)+(4x-3)^2(2x+3)'$

$=\{2(4x-3)^{2-1}(4x-3)'\}(2x+3)+(4x-3)^2\cdot2$

$=\{2(4x-3)\cdot4\}(2x+3)+2(4x-3)^2$

$=2(4x-3)\{4(2x+3)+(4x-3)\}$

$=2(4x-3)(12x+9)$

$=6(4x-3)(4x+3)$

６．(1)　関数 $f(x)=2x^3+3x^2-8x$ について，$x=-2$ における微分係数を求めよ。

(2)　2 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$f(1)=-3$，　$f'(1)=-1$，　$f'(0)=3$

(3)　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が $2f(x)=(x+1)f'(x)+6$ を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　(1)　$f'(-2)=4$　　(2)　$f(x)=-2x^2+3x-4$　　(3)　$a=2$，$b=4$

解説

(1)　$f'(x)=2\cdot3x^2+3\cdot2x-8\cdot1=6x^2+6x-8$

したがって　$f'(-2)=6\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)-8=4$

(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

$f(1)=-3$ から　$a+b+c=-3$

$f'(1)=-1$ から　$2a+b=-1$

$f'(0)=3$ から　$b=3$

これを解いて　$a=-2$，$b=3$，$c=-4$

したがって　$f(x)=-2x^2+3x-4$

(3)　$f(x)=x^2+ax+b$ から　$f'(x)=2x+a$

与えられた等式に代入すると

$2(x^2+ax+b)=(x+1)(2x+a)+6$

整理して　$2x^2+2ax+2b=2x^2+(a+2)x+a+6$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較すると

$2a=a+2$，　$2b=a+6$

これを解いて　$a=2$，$b=4$

7．x についての整式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの余りを，a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

解答　$xf'(a)+f(a)-af'(a)$

解説

$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とし，余りを $px+q$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)+px+q \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\{(x-a)^2\}'Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p$$
$$=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p \quad \cdots\cdots ②$$

①，② の両辺に $x=a$ を代入すると，それぞれ

$$f(a)=pa+q \quad \cdots\cdots ③,\qquad f'(a)=p \quad \cdots\cdots ④$$

④ から　$p=f'(a)$

よって，③ から　$q=f(a)-pa=f(a)-af'(a)$

したがって，求める余りは　$xf'(a)+f(a)-af'(a)$

8．(1)　地上から真上に初速度 29.4 m/s で投げ上げられた物体の t 秒後の高さ h は，$h=29.4t-4.9t^2$ (m) で与えられる。この運動について，3 秒後の瞬間の速さを求めよ。

(2)　球の半径が 1 m から毎秒 10 cm の割合で大きくなるとき，30 秒後における球の表面積の変化率を求めよ。

解答　(1)　0 m/s　　(2)　3.2π m^2/s

解説

(1)　t 秒後の瞬間の速さは，h の時刻 t に対する変化率である。

h を t で微分すると　$\dfrac{dh}{dt}=29.4-9.8t$

求める瞬間の速さは，$t=3$ として　$29.4-9.8\cdot 3=0$ (m/s)

(2)　t 秒後の球の半径は $(1+0.1t)$ m である。

t 秒後の表面積を S m^2 とすると　$S=4\pi(1+0.1t)^2$

S を t で微分すると　$\dfrac{dS}{dt}=4\pi\cdot 2(1+0.1t)\cdot 0.1=0.8\pi(1+0.1t) \quad \cdots\cdots ①$

求める変化率は，① で $t=30$ として　3.2π m^2/s

9．(1)　次の条件を満たす 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(1)=f'(-1)=1,\ f(1)=0,\ f(-1)=2$$

(2)　等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　(1)　$f(x)=x^3-2x+1$　　(2)　$f(x)=-2x^2+2x-5$

解説

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ とすると　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(1)=1$ から　$3a+2b+c=1 \quad \cdots\cdots ①$

$f'(-1)=1$ から　$3a-2b+c=1 \quad \cdots\cdots ②$

$f(1)=0$ から　$a+b+c+d=0 \quad \cdots\cdots ③$

$f(-1)=2$ から　$-a+b-c+d=2 \quad \cdots\cdots ④$

① ～ ④ を解いて　$a=1,\ b=0,\ c=-2,\ d=1$

したがって　$f(x)=x^3-2x+1$

(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

与えられた等式に代入すると　$2(ax^2+bx+c)+x(2ax+b)=-8x^2+6x-10$

よって　$4ax^2+3bx+2c=-8x^2+6x-10$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$$4a=-8,\ 3b=6,\ 2c=-10$$

ゆえに　$a=-2,\ b=2,\ c=-5$

したがって　$f(x)=-2x^2+2x-5$