第２回定期考査　Ｈ１８．７．４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1. 曲線 $y=4x-x^3$ 上の点 $(-2,0)$ における接線の方程式を求めよ。

2. 曲線 $y=x^2-x+3$ について，点 $(1,-1)$ を通る接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

3. 関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a+2)x+1$ が極値を持つような，定数aの値の範囲を求めよ。

4. $x\geqq 0$ のとき，不等式 $4x^3-9x^2-12x+28\geqq 0$ が成り立つことを証明せよ。

5. a を定数とする。方程式 $x^4-2x^2-a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

6. 関数 $f(x)=2x^3+3(2-a)x^2-12ax-12a$ がある。ただし，a は正の定数とする。

(1)　$f'(x)=0$ となる x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値，極小値を求めよ。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

7. ２次関数 $f(x)=2x^2-ax+a-1$ (a は定数) がある。

(1)　$f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

(2)　$x\geqq 0$ において，常に $f(x)\geqq -2$ であるような a の値の範囲を求めよ。

8. 袋の中に赤玉が１個，青玉が２個，白玉が３個入っている。この中から玉を１個取り出し，色を確かめてから元に戻すという操作を繰り返す。取り出した玉の色が赤であれば３点，青であれば２点，白であれば１点を得点とし，合計得点が４点以上となれば操作を終了する。

(1)　２回目の操作で合計得点が６点となり終了する確率を求めよ。

(2)　２回目の操作で終了する確率を求めよ。

1. 曲線 $y=4x-x^3$ 上の点 $(-2, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

$y' = 4-3x^2$

$x=-2$ における接線の傾きは

$y' = 4-3(-2)^2$

$= 4-3\cdot 4 = -8$

$\therefore\ y-0 = -8(x+2)$

$\therefore\ y = -8x-16$

2. 曲線 $y=x^2-x+3$ について，点 $(1, -1)$ を通る接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

接点の座標を (a, a^2-a+3)

とおくと，$y' = 2x-1$ より

この点における接線の

傾きは $2a-1$

よって，接点の方程式は

$y-(a^2-a+3) = (2a-1)(x-a)$

これが，点 $(1, -1)$ を通るので

$-1-(a^2-a+3) = (2a-1)(1-a)$

整理して

$a^2-2a-3 = 0$

$(a-3)(a+1) = 0$

$\therefore\ a = 3, -1$

・$a=-1$ の時

接点は $(-1, 5)$

接線の方程式は

$y-5 = -3(x+1)$

$\therefore\ y = -3x+2$

・$a=3$ の時

接点は $(3, 9)$

接線の方程式は

$y-9 = 5(x-3)$

$\therefore\ y = 5x-6$

以上より

$y = -3x+2$，$(-1, 5)$

$y = 5x-6$，$(3, 9)$

3. 関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a+2)x+1$ が極値を持つような，定数aの値の範囲を求めよ。

$f'(x) = x^2+2ax+(a+2)$

$f(x)$ が極値を持つには

$f'(x)=0$ が，異なる2つの

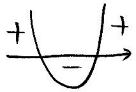
実数解を持てばいい

$\therefore\ D/4 = a^2-(a+2) > 0$

$a^2-a-2 > 0$

$(a-2)(a+1) > 0$

$\therefore\ a<-1,\ a>2$



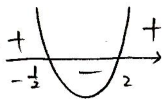
4. $x \geqq 0$ のとき，不等式 $4x^3-9x^2-12x+28 \geqq 0$ が成り立つことを証明せよ。

証）$f(x) = 4x^3-9x^2-12x+28$ とおく

$f'(x) = 12x^2-18x-12$

$= 6(2x^2-3x-2)$

$= 6(2x+1)(x-2)$



増減表

x	0	…	2	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

よって，$x \geqq 0$ において $f(x)$ の最小値は

0であるので，$x \geqq 0$ であるどんな x に

ついても $f(x) \geqq 0$ が成り立つ。

$\therefore$ $x \geqq 0$ のとき

$4x^3-9x^2-12x+28 \geqq 0$

が成り立つ。

5. a を定数とする。方程式 $x^4-2x^2-a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$a = x^4-2x^2$ として

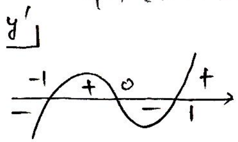
$y=a$ と $y=x^4-2x^2$ の

交点の個数を数える。

$y' = 4x^3-4x$

$= 4x(x^2-1)$

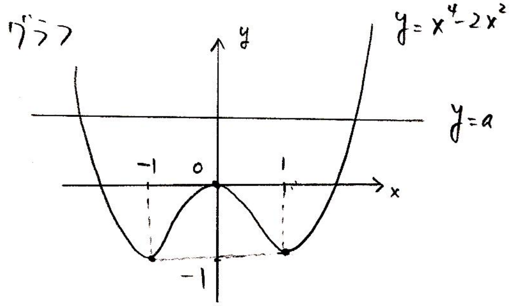
$= 4x(x+1)(x-1)$



増減表

x	…	-1	…	0	…	1	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

グラフ



よって

$a>0$ …… 2個

$a=0$ … 3個

$-1<a<0$ … 4個

$a=-1$ … 2個

$a<-1$ … 0個

6. 関数 $f(x)=2x^3+3(2-a)x^2-12ax-12a$ がある。ただし，a は正の定数とする。

(1) $f'(x)=0$ となる x の値を求めよ。

$f'(x)=6x^2+6(2-a)x-12a$

$=6\{x^2+(2-a)x-2a\}$

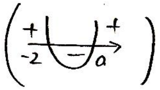
$=6(x+2)(x-a)$

∴ $f'(x)=0$ となるのは $x=-2, a$

(2) $f(x)$ の極大値，極小値を求めよ。

条件より $a>0$

よって増減表は



x	$\cdots$	-2	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘		↗

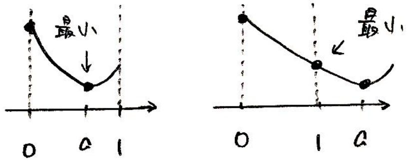
$-a^3-6a^2-12a$

極大値 8 $(x=-2)$

極小値 $-a^3-6a^2-12a$ $(x=a)$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2)より $x=a$ で極小より



$(0<a<1)$ $(a\geqq 1)$

$a\geqq 1$ の時．$x=1$ で最小

$0<a<1$ の時．$x=a$ で最小

$x=1$ の時．$f(x)=2+3(2-a)-12a-12a$

$=-27a+8$

最小値 $\begin{cases}-a^3-6a^2-12a & (0<a<1)\\ -27a+8 & (a\geqq 1)\end{cases}$

7. 2次関数 $f(x)=2x^2-ax+a-1$ (a は定数) がある。

(1) $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

$f(x)=2x^2-ax+a-1$

$=2(x^2-\frac{1}{2}ax)+a-1$

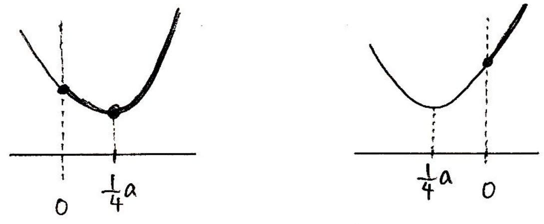
$=2\{(x-\frac{1}{4}a)^2-\frac{1}{16}a^2\}+a-1$

$=2(x-\frac{1}{4}a)^2-\frac{1}{8}a^2+a-1$

最小値

$-\frac{1}{8}a^2+a-1$

(2) $x\geqq 0$ において，常に $f(x)\geqq -2$ であるような a の値の範囲を求めよ。



$\frac{1}{4}a>0$ $(a>0)$ の時．

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は $x=\frac{1}{4}a$ の時

で．$f(\frac{1}{4}a)=-\frac{1}{8}a^2+a-1$

∴

$-\frac{1}{8}a^2+a-1\geqq -2$

$a^2-8a-8\leqq 0$.

ここで

$a^2-8a-8=0$

∴ $a=4\pm\sqrt{24}$

$=4\pm 2\sqrt{6}$

よって

$4-2\sqrt{6}\leqq a\leqq 4+2\sqrt{6}$

$a>0$ より

$0<a\leqq 4+2\sqrt{6}\cdots$(i)

$\frac{1}{4}a\leqq 0$ $(a\leqq 0)$ の時

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は $x=0$ の時 で

$f(0)=a-1$

よって

$a-1\geqq -2$

より

$a\geqq -1$.

$a\leqq 0$ より

$-1\leqq a\leqq 0\cdots$(ii)

以上より

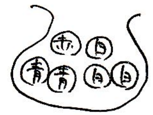
(i)(ii) より あわせて

$-1\leqq a\leqq 4+2\sqrt{6}$

8. 袋の中に赤玉が1個，青玉が2個，白玉が3個入っている。この中から玉を1個取り出し，色を確かめてから元に戻すという操作を繰り返す。取り出した玉の色が赤であれば3点，青であれば2点，白であれば1点を得点とし，合計得点が4点以上となれば操作を終了する。

(1) 2回目の操作で合計得点が6点となり終了する確率を求めよ。

赤 → 赤と取り出す時のみである。



∴ $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(2) 2回目の操作で終了する確率を求めよ。

6点 赤 → 赤 $\frac{1}{36}$

5点 赤 → 青 or 青 → 赤 で．$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times 2=\frac{4}{36}$

赤 青

4点 赤 → 白 or 白 → 赤 で．$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}\times 2=\frac{6}{36}$

赤 白

青 → 青 で．$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$

以上より

$\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}=\frac{15}{36}$

$=\frac{5}{12}$