数学演習（微分法）Ｈ２１．５．１５　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１. 関数 $f(x)=-x^2+4x$ について，定義に従って微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

２. 点 $(0\,,\,-1)$ を通り，曲線 $y=x^3+3x^2$ に接する直線の方程式と接点の座標を求めよ。

３. 関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a+2)x+1$ が極値を持つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

４. 曲線 C : $y=x^3+3x^2-1$ 上の x 座標が２である点を P とし，点 P における曲線 C の接線を l とする。曲線 C と直線 l の共有点のうち，P でない点を Q とする時，点 Q の x 座標を求めよ。

５. $x=1$ で極大値６をとり，$x=2$ で極小値５をとるような３次関数 $f(x)$ を求めよ。

６. 関数 $y=-x^3-3x^2-3x+1$ のグラフを書け。

７. 関数 $y=-x^3-3x^2+5$ $(-3\leqq x\leqq 2)$ の最大値･最小値とそのときの x の値を求めよ。

８. $a<0$ とする。関数 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ $(1\leqq x\leqq 3)$ の最大値が１０，最小値が－２となるように，定数 a , b の値を定めよ。

９. 方程式 $x^3-12x-a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

10. $x\geqq 0$ のとき，不等式 $4x^3+28\geqq 9x^2+12x$ が成り立つことを証明せよ。

数学演習（微分法）Ｈ２１．５．１５　　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ 　　）

1．関数 $f(x)=-x^2+4x$ について，定義に従って微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-(a+h)^2+4(a+h)\}-(-a^2+4a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(-a^2-2ah-h^2+4a+4h)-(-a^2+4a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-2ah-h^2+4h}{h}=\lim_{h\to0}(-2a-h+4)$$

$$=\underline{-2a+4}$$

2．点 ~~(2, 4)~~ (0, −1) を通り，曲線 $y=\cancel{x^2-3x+2}\ x^3+3x^2$ に接する直線の方程式~~を~~と接点の座標を求めよ。

接点の座標を $(a,\ a^3+3a^2)$ とおくと

$y'=3x^2+6x$ より，この点における接線の傾きは $3a^2+6a$

ゆえに，接線の方程式は

$$y-(a^3+3a^2)=(3a^2+6a)(x-a)\quad\cdots(*)$$

とおける。この直線は点 $(0,-1)$ を通るので

$$-1-(a^3+3a^2)=(3a^2+6a)(0-a)$$

整理して

$$2a^3+3a^2-1=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ & & -2 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

左辺に $a=-1$ を代入すると

$2(-1)^3+3(-1)^2-1=-2+3-1=0$ より

$$2a^3+3a^2-1=(a+1)(2a^2+a-1)$$

$$=(a+1)(2a-1)(a+1)$$

$$=(a+1)^2(2a-1)=0$$

$\begin{matrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{matrix}$

$\therefore\ a=-1,\ \frac{1}{2}$

$a=-1$ の時，接点は $(-1,\ (-1)^3+3(-1)^2)$　$\therefore\ (-1,\ 2)$

　接線の方程式は $(*)$ より $y=-3x-1$

$a=\frac{1}{2}$ の時，接点は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}+\frac{3}{4}\right)$　$\therefore\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{8}\right)$

　接線の方程式は $(*)$ より $y=\frac{15}{4}x-1$

以上より

$\underline{y=-3x-1,\ (-1,\ 2),\ y=\frac{15}{4}x-1,\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{8}\right)}$

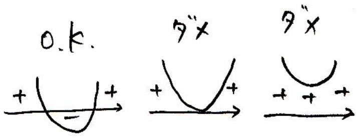
3．関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a+2)x+1$ が極値を持つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$$f'(x)=x^2+2ax+a+2$$

$f(x)$ が極値を持つ

$\Leftrightarrow$ $f'(x)$ が異なる

2つの実数解を持つ（図参照）



よって $x^2+2ax+a+2=0$ について

$$D/4=a^2-(a+2)>0$$

$$a^2-a-2>0$$

$$(a-2)(a+1)>0$$

$\therefore\ \underline{a<-1,\ a>2}$

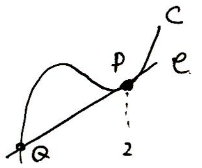
4．曲線 C：$y=x^3+3x^2-1$ 上の x 座標が 2 である点を P とし，点 P における曲線 C の接線を l とする。曲線 C と直線 l の共有点のうち，P でない点を Q とする時，点 Q の x 座標を求めよ。

$y'=3x^2+6x$ より

x 座標が 2 である点の

y 座標は $y=2^3+3\cdot2^2-1=19$

接線の傾きは $y'=3\cdot2^2+6\cdot2=24$



$\therefore\ y-19=24(x-2)$

$\therefore\ y=24x-29$

これが l の方程式である。

直線 l と曲線 C の共有点は

$$x^3+3x^2-1=24x-29$$

$$x^3+3x^2-24x+28=0$$

$$\left(\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -24 & 28 \\ & & 2 & 10 & -28 \\ \hline & 1 & 5 & -14 & 10 \end{array}\right)$$

$\therefore\ (x-2)(x^2+5x-14)=0$

$\therefore\ (x-2)(x-2)(x+7)=0$

$\therefore\ (x-2)^2(x+7)=0$

よって

$x=2,\ -7$

ここで点Qは点Pでない，つまり $x\neq2$ より

点Qの x 座標は

$\underline{-7}$

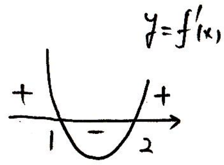
5．$x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとるような 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$ で極大，$x=2$ で極小より

$y=f'(x)$ のグラフは右図の通り



つまり $f'(1)=0$ かつ $f'(2)=0$

$\therefore\ f'(1)=3a+2b+c=0\ \cdots①$

$\quad f'(2)=12a+4b+c=0\ \cdots②$

また，$x=1$ で極大値 6，$x=2$ で極小値 5 より

$f(1)=a+b+c+d=6\ \cdots③$

$f(2)=8a+4b+2c+d=5\ \cdots④$

④−③より　$7a+3b+c=-1\ \cdots⑤$

①②⑤の連立方程式を解いて

$a=2,\ b=-9,\ c=12$

③に代入して $d=1$

以上より

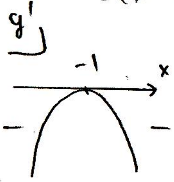
$\underline{f(x)=2x^3-9x^2+12x+1}$

6．関数 $y=-x^3-3x^2-3x+1$ のグラフを書け。

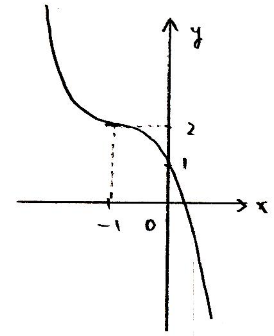
$y'=-3x^2-6x-3$

$=-3(x^2+2x+1)$

$=-3(x+1)^2$



よってグラフは下図



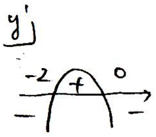
増減表

x	…	-1	…
y'	−	0	−
y	↘	2	↘

7．関数 $y=-x^3-3x^2+5$ $(-3\leqq x\leqq 2)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。

$y'=-3x^2-6x$

$=-3x(x+2)$



増減表 $(-3\leqq x\leqq 2$ の範囲$)$

x	-3	…	-2	…	0	…	2
y'		−	0	+	0	−	
y	5	↘	1	↗	5	↘	-15

ゆえに

最大値 5 $(x=-3, 0)$

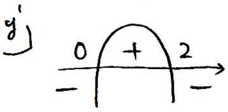
最小値 −15 $(x=2)$

8．$a<0$ とする。関数 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ $(1\leqq x\leqq 3)$ の最大値が１０，最小値が－２となるように，定数 a, b の値を定めよ。

$f'(x)=3ax^2-6ax$

$=3ax(x-2)$

$a<0$ より



増減表は

x	1	…	2	…	3
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

$f(1)=a-3a+b$
$=-2a+b$

$f(2)=8a-12a+b$
$=-4a+b$

$f(3)=27a-27a+b$
$=b$

増減表より

$x=2$ で最大.

また

$f(1)=-2a+b$.

$f(3)=b$

で $a<0$ より $-2a>0$

よって $x=3$ で最小となる

最大値10, 最小値−2 より

$$\begin{cases}-4a+b=10\\ b=-2\end{cases}$$

$\therefore$ $a=-3$, $b=-2$

(これは $a<0$ を満たす)

9．方程式 $x^3-12x-a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

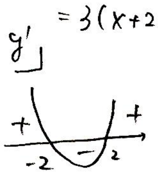
$x^3-12x=a$ とし

$y=x^3-12x$ と $y=a$ の交点の個数を数える

$y'=3x^2-12$

$=3(x^2-4)$

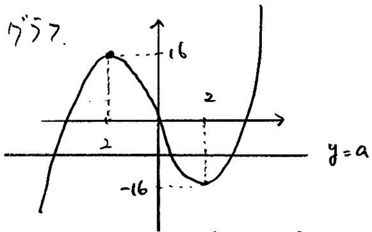
$=3(x+2)(x-2)$



増減表は

x	…	-2	…	2	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	16	↘	-16	↗

グラフ



よってグラフより

$a<-16$, $a>16$ … 1個

$a=\pm 16$ … 2個

$-16<a<16$ … 3個

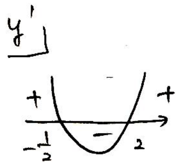
10．$x\geqq 0$ のとき，不等式 $4x^3+28\geqq 9x^2+12x$ が成り立つことを証明せよ。

証) $f(x)=(4x^3+28)-(9x^2+12x)$ とおく.

$f'(x)=12x^2-18x-12$

$=6(2x^2-3x-2)$

$=6(2x+1)(x-2)$



よって $x\geqq 0$ における増減表は

x	0	…	2	…
y'		−	0	+
y		↘	0	↗

となる。つまり $x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は 0 であるので、$x\geqq 0$ における どんな x についても

$f(x)\geqq 0$、が成り立つ。

つまり

$(4x^3+28)-(9x^2+12x)\geqq 0$

$\Longleftrightarrow 4x^3+28\geqq 9x^2+12x$ //