数学演習（微分法）　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．x 座標が与えられた，次の曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=-2x^2+1$　$(x=1)$　　(2)　$y=x^3-3x$　$(x=1)$

(3)　$y=x^3+x^2-2$　$(x=-1)$　　(4)　$y=-x^3+4x$　$(x=0)$

２．次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+4$　$(0,\ 0)$　　(2)　$y=-x^2+x-3$　$(1,\ 1)$

(3)　$y=x^3+4$　$(0,\ -12)$

３．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき，定数 a，b の値と $f(x)$ の極大値を求めよ。

４．次の関数の極値を求め，グラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x^2-9x+11$　　(2)　$y=(x-1)^2(x+2)$

(3)　$y=-x^3+6x^2-12x+8$　　(4)　$y=-2x^3+12x^2-18x$

５．3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=-2$ で極大値 11 をとり，$x=1$ で極小値 -16 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

6．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=x^3-12x$　　$(-3\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=x^3-3x^2+4$　$(-2\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=x^3-6x^2+9x$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(4)　$y=-2x^3+3x^2+12x-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

7．関数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -27 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

8．関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を次の各場合について求めよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$0\leqq a<1$　　(2)　$1\leqq a$

9．$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値，最小値を求めよ。

10. 方程式 $x^3-3x^2-9x+11-a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

11. $x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$2x^3+\dfrac{1}{9}>x^2$　　(2)　$x^3-3x^2+4x+1>0$

数学演習（微分法）解答

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．(1)　$y'=-4x$ であるから，$x=1$ における接線の傾きは　　$-4\cdot1=-4$

$x=1$ のとき　$y=-1$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-1)=-4(x-1)$$

すなわち　　$y=-4x+3$

(2)　$y'=3x^2-3$ であるから，$x=1$ における接線の傾きは　　$3\cdot1^2-3=0$

$x=1$ のとき　$y=-2$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-2)=0\cdot(x-1)$$

すなわち　　$y=-2$

(3)　$y'=3x^2+2x$ であるから，$x=-1$ における接線の傾きは

$$3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)=1$$

$x=-1$ のとき　$y=-2$ であるから，接線の方程式は

$$y-(-2)=x-(-1)$$

すなわち　　$y=x-1$

(4)　$y'=-3x^2+4$ であるから，$x=0$ における接線の傾きは　　$-3\cdot0^2+4=4$

$x=0$ のとき　$y=0$ であるから，接線の方程式は　　$y=4x$

2．(1)　$y'=2x-3$

接点の座標を $(a,\ a^2-3a+4)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^2-3a+4)=(2a-3)(x-a)$$

すなわち　　$y=(2a-3)x-a^2+4$　……①

この直線が点 $(0,\ 0)$ を通るから　　$0=(2a-3)\cdot0-a^2+4$

これを解いて　　$a=\pm2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 2)$

① から，接線の方程式は　$y=x$

$a=-2$ のとき，接点の座標は　$(-2,\ 14)$

① から，接線の方程式は　$y=-7x$

(2)　$y'=-2x+1$

接点の座標を $(a,\ -a^2+a-3)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(-a^2+a-3)=(-2a+1)(x-a)$$

すなわち　　$y=(-2a+1)x+a^2-3$　……①

この直線が点 $(1,\ 1)$ を通るから　　$1=(-2a+1)\cdot1+a^2-3$

よって　　$a^2-2a-3=0$

これを解いて　　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -5)$

① から，接線の方程式は　$y=3x-2$

$a=3$ のとき，接点の座標は　$(3,\ -9)$

① から，接線の方程式は　$y=-5x+6$

(3)　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+4)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^3+4)=3a^2(x-a)$$

すなわち　　$y=3a^2x-2a^3+4$　……①

この直線が点 $(0,\ -12)$ を通るから　　$-12=3a^2\cdot0-2a^3+4$

よって　　$a^3=8$

a は実数であるから　　$a=2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 12)$

① から，接線の方程式は　$y=12x-12$

3．$f'(x)=3x^2-6x+a$

$x=3$ で極小値 -26 をとるから　　$f'(3)=0,\ f(3)=-26$

よって　　$9+a=0,\ 3a+b=-26$

これを解いて　　$a=-9,\ b=1$

このとき　　$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 6	↘	極小 -26	↗

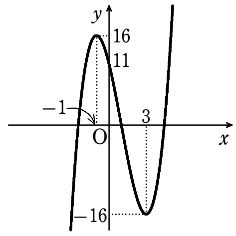
以上から　　$a=-9,\ b=1$；$x=-1$ のとき極大値 6

4．(1)　$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	-1	…	3	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗



よって，$x=-1$ のとき極大値 16,

$x=3$ のとき極小値 -16　をとる。

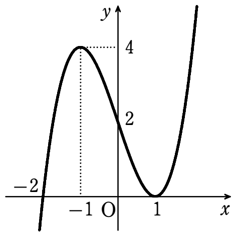
また，グラフは[図]

(2)　$y=x^3-3x+2$ であるから　　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm1$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



よって，$x=-1$ のとき極大値 4,

$x=1$ のとき極小値 0　をとる。

また，グラフは[図]

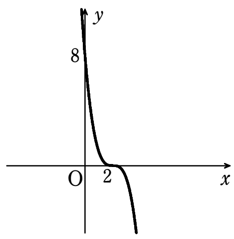
(3)　$y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

常に $y'\leqq0$ であるから，y は常に減少し，

極値をもたない。

また，$x=2$ のとき　$y=0$

したがって，グラフは[図]

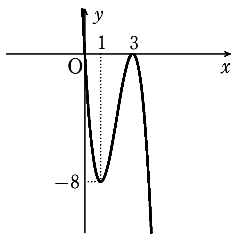


(4)　$y'=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	1	…	3	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘



よって，$x=1$ のとき極小値 -8,

$x=3$ のとき極大値 0　をとる。

また，グラフは[図]

5．$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=-2$ で極大値 11 をとるから　　$f'(-2)=0,\ f(-2)=11$

よって　　$12a-4b+c=0$　　　……①

$-8a+4b-2c+d=11$　……②

また，$x=1$ で極小値 -16 をとるから　　$f'(1)=0,\ f(1)=-16$

よって　　$3a+2b+c=0$　　　……③

$a+b+c+d=-16$　　……④

④－② から　　$9a-3b+3c=-27$

ゆえに　　　$3a-b+c=-9$　　……⑤

③－⑤ から　　$3b=9$　　よって　　$b=3$

$b=3$ を ①，③ に代入して，a と c の連立方程式を解くと

$a=2,\ c=-12$

さらに，④ から　　$d=-9$

このとき　　$f(x)=2x^3+3x^2-12x-9$

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 11	↘	極小 -16	↗

以上から　　$a=2,\ b=3,\ c=-12,\ d=-9$

6．(1)　$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm2$

$-3\leqq x\leqq3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	↗	16	↘	-16	↗	-9

よって，$x=-2$ のとき最大値 16,

$x=2$ 　のとき最小値 -16 をとる。

(2) $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0$，2

$-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-16	↗	4	↘	0	↗	4

よって，$x=0$，3 のとき最大値 4,

$x=-2$ 　のとき最小値 -16 をとる。

(3) $y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　　$x=1$，3

$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-16	↗	4	↘	2

よって，$x=1$ 　のとき最大値 4,

$x=-1$ のとき最小値 -16 をとる。

(4) $y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1$，2

$-2\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	-10	↗	10

よって，$x=1$ 　のとき最大値 10,

$x=-1$ のとき最小値 -10 をとる。

7．$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，4

$a>0$ であるから，$-1\leqq x\leqq 2$ における増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$b-7a$	↗	b	↘	$b-16a$

ゆえに，最大値は　　$f(0)=b$

また，$a>0$ より，$b-7a>b-16a$ であるから

最小値は　　$f(2)=b-16a$

条件から　　$b=5$，$b-16a=-27$

よって　　$a=2$，$b=5$

これは $a>0$ を満たす。

8．$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm a$

(1) $0\leqq a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	$1-3a^2$

よって，$f(x)$ は $x=a$ のとき極小かつ最小となる。

最大値は　　$f(0)$　または　$f(1)$

ここで，$f(0)=f(1)$ すなわち $1-3a^2=0$ を満たす a の値は，$0\leqq a<1$ であるから

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ゆえに　　$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$f(0)<f(1)$

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 　　のとき　$f(0)=f(1)$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<a<1$ のとき　$f(0)>f(1)$

したがって

$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $x=1$ で最大値 $1-3a^2$，$x=a$ で最小値 $-2a^3$

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $x=0$，1 で最大値 0，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<a<1$ のとき $x=0$ で最大値 0，$x=a$ で最小値 $-2a^3$

(2) $1\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ はこの範囲で常に減少する。

したがって　　$x=0$ で最大値 0，$x=1$ で最小値 $1-3a^2$

9．$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，2

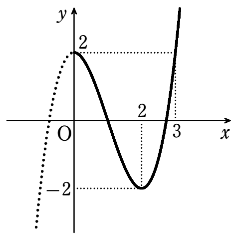
$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	-2	↗

また，$f(x)=2$ とすると　　$x^3-3x^2+2=2$

よって　　$x^2(x-3)=0$　　ゆえに　　$x=0$，3

$x\geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



したがって，$0<a<2$ のとき

$x=0$ で最大値 2,

$x=a$ で最小値 a^3-3a^2+2

$2\leqq a<3$ のとき

$x=0$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 -2

$a=3$ のとき

$x=0$，3 で最大値 2，$x=2$ で最小値 -2

$3<a$ のとき

$x=a$ で最大値 a^3-3a^2+2，$x=2$ で最小値 -2

10. 方程式を変形すると　　$x^3-3x^2-9x+11=a$

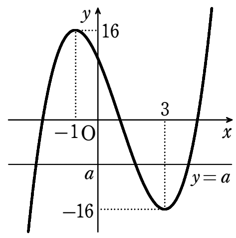
$f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ とおくと　　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1$，3

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の異なる実数解の個数に一致する。

したがって，求める実数解の個数は

$a<-16$，$16<a$ のとき　1 個；

$a=-16$，16 のとき　2 個；

$-16<a<16$ のとき　3 個

11. (1) $f(x)=2x^3+\dfrac{1}{9}-x^2$ とすると　　$f'(x)=6x^2-2x=2x(3x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，$\dfrac{1}{3}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\dfrac{2}{27}$	↗

よって，$x>0$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ で最小値 $\dfrac{2}{27}$ をとる。

したがって，$x>0$ のとき，$f(x)>0$ であるから

$2x^3+\dfrac{1}{9}-x^2>0$　すなわち　$2x^3+\dfrac{1}{9}>x^2$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+4x+1$ とすると　　$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$

常に $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は常に増加する。

$f(0)=1>0$ であるから，$x>0$ のとき $f(x)>0$ である。

よって　　$x^3-3x^2+4x+1>0$