数学演習（微分法）Ｈ２３．１２．９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. (1)　関数 $f(x)=x^2-2x-3$ において，x が a から b $(a \fallingdotseq b)$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=2x^2-x$ において，x が 1 から $1+h$ $(h \fallingdotseq 0)$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

２. <u>導関数の定義にしたがって</u>，次の関数の導関数を求めよ。$y=x^3-2x^2-4$

３. 等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

４. (1)　次の極限値を求めよ。

(ア)　$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2}$　　(イ)　$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-12}$

(2)　次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ などで表せ。

(ア)　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$　　(イ)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}$

５. 関数 $f(x)=x^2+x-2$ について，$y=f(x)$ のグラフ上で x 座標が -1 である点を A とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における接線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2)　点 A を通り，接線 ℓ_1 に垂直な直線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

６. 曲線 $y=x(x-2)^2$ に，点 $(0,\ -18)$ から引いた接線 ℓ の方程式を求めよ。

7．曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A $(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

8．(1)　曲線 $y=x^3-4x$ の接線で，傾きが -1 であるものを求めよ。

(2)　P を放物線 $y=-x^2$ 上の点とし，Q を点 $(-5,\ 1)$ とする。2 点 P，Q を通る直線が，点 P における接線と直交しているときの点 P の座標を求めよ。

9．2 つの放物線 C_1：$y=x^2+1$，C_2：$y=-2x^2+4x-3$ の共通接線の方程式を求めよ。

数学演習（微分法）Ｈ２３．１２．９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．(1)　関数 $f(x)=x^2-2x-3$ において，x が a から $b\ (a \fallingdotseq b)$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=2x^2-x$ において，x が 1 から $1+h\ (h \fallingdotseq 0)$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。

解答　(1)　$a+b-2$　　(2)　$3+2h$

解説

(1)　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{(b^2-2b-3)-(a^2-2a-3)}{b-a}$

$=\dfrac{(b^2-a^2)-2(b-a)}{b-a}=\dfrac{(b-a)(b+a-2)}{b-a}$

$=a+b-2$

(2)　$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\dfrac{\{2(1+h)^2-(1+h)\}-(2\cdot 1^2-1)}{h}$

$=\dfrac{3h+2h^2}{h}=3+2h$

2．<u>導関数の定義にしたがって</u>，次の関数の導関数を求めよ。$y=x^3-2x^2-4$

解答　$y'=3x^2-4x$

解説

$f(x)=x^3-2x^2-4$ とすると

$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-2(x+h)^2-4-(x^3-2x^2-4)$

$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2(x^2+2xh+h^2)-4-x^3+2x^2+4$

$=h(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)$

よって　　$y'=f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)$

$=3x^2-4x$

3．等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=-2x^2+2x-5$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると　　$f'(x)=2ax+b$

与えられた等式に代入すると

$2(ax^2+bx+c)+x(2ax+b)=-8x^2+6x-10$

整理して　$4ax^2+3bx+2c=-8x^2+6x-10$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$4a=-8,\ 3b=6,\ 2c=-10$

よって　　$a=-2,\ b=2,\ c=-5$

したがって　　$f(x)=-2x^2+2x-5$

4．(1)　次の極限値を求めよ。

(ア)　$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$　　　　(イ)　$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-12}$

(2)　次の極限値を $a,\ f(a),\ f'(a)$ などで表せ。

(ア)　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{h}$　　　　(イ)　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}$

解答　(1)　(ア)　12　　(イ)　$\dfrac{5}{7}$　　(2)　(ア)　$3f'(a)$　　(イ)　$f(a)-\dfrac{a}{2}f'(a)$

解説

(1)　(ア)　$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)$

$=(-2)^2-2\cdot(-2)+4=12$

(イ)　$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-12}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-4)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-2}{x-4}=\dfrac{-3-2}{-3-4}=\dfrac{5}{7}$

(2)　(ア)　$h\longrightarrow 0$ のとき，$3h\longrightarrow 0$ であるから

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3\cdot\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}$

$=3\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=3f'(a)$

(イ)　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(a)+a^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^2-a^2)f(a)-a^2\{f(x)-f(a)\}}{x^2-a^2}$

$=\lim\limits_{x\to a}\left\{f(a)-\dfrac{a^2}{x+a}\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}=f(a)-\dfrac{a}{2}f'(a)$

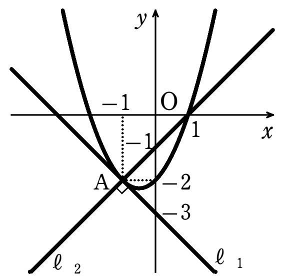
5．関数 $f(x)=x^2+x-2$ について，$y=f(x)$ のグラフ上で x 座標が -1 である点を A とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における接線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2)　点 A を通り，接線 ℓ_1 に垂直な直線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=-x-3$　　(2)　$y=x-1$

解説



(1)　$f(-1)=(-1)^2+(-1)-2=-2$

また　　$f'(x)=2x+1$

よって　　$f'(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$

ゆえに，接線 ℓ_1 の方程式は

$y-(-2)=-\{x-(-1)\}$

すなわち　$y=-x-3$

(2)　直線 ℓ_2 の傾きを m とすると，

$\ell_1\perp\ell_2$ から　　$m\cdot(-1)=-1$

よって　　　$m=1$

ゆえに，直線 ℓ_2 の方程式は

$y-(-2)=1\cdot\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=x-1$

6．曲線 $y=x(x-2)^2$ に，点 $(0,\ -18)$ から引いた接線 ℓ の方程式を求めよ。

解答　$y=7x-18$

解説

$f(x)=x(x-2)^2$ とおくと　　$f(x)=x^3-4x^2+4x$

よって　　$f'(x)=3x^2-8x+4$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(a^3-4a^2+4a)=(3a^2-8a+4)(x-a)$

この直線が点 $(0,\ -18)$ を通るとすると

$-18-(a^3-4a^2+4a)=(3a^2-8a+4)(0-a)$

整理して　$a^3-2a^2-9=0$　……①

$P(a)=a^3-2a^2-9$ とおくと

$P(3)=3^3-2\cdot 3^2-9=0$

ゆえに，$P(a)$ は $a-3$ で割り切れ，方程式 ① は

$(a-3)(a^2+a+3)=0$

$a^2+a+3=0$　より　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$ であるから　　$a=3$

したがって，接線 ℓ の方程式は

$y-(3^3-4\cdot 3^2+4\cdot 3)=(3\cdot 3^2-8\cdot 3+4)(x-3)$

すなわち　$y=7x-18$

7．曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A $(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-7<a<20$

解説

$y=x^3-9x^2+15x-7$ から　　$y'=3x^2-18x+15$

曲線上の点 $(t,\ t^3-9t^2+15t-7)$ における接線の方程式は

$y-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(x-t)$

この直線が点 A $(0,\ a)$ を通るとき

$a-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(-t)$

よって　　$-2t^3+9t^2-7=a$　……①

また，3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線も異なる。

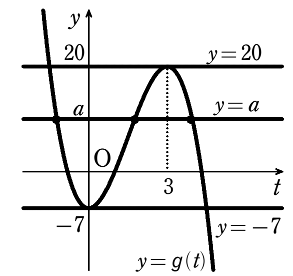
ゆえに，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつとき，点 A から曲線に 3 本の接線が引ける。

ここで，$g(t)=-2t^3+9t^2-7$ とすると

$g'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	……	0	……	3	……
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	極小 -7	↗	極大 20	↘



よって，$y=g(t)$ のグラフは右の図のようになる。

① の異なる実数解の個数，すなわち $y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数が 3 となるような a の値の範囲は　　$-7<a<20$

8．(1)　曲線 $y=x^3-4x$ の接線で，傾きが -1 であるものを求めよ。

(2)　P を放物線 $y=-x^2$ 上の点とし，Q を点 $(-5,\ 1)$ とする。2 点 P，Q を通る直線が，点 P における接線と直交しているときの点 P の座標を求めよ。

解答　(1)　$y=-x+2,\ y=-x-2$　　(2)　P$(-1,\ -1)$

解説

(1)　$y=x^3-4x$ から　　$y'=3x^2-4$

この曲線上の点 $(a,\ a^3-4a)$ における接線の傾きが -1 であるとすると

$3a^2-4=-1$　　　よって　　$a=\pm 1$

求める接線の方程式は

$y-(a^3-4a)=(3a^2-4)(x-a)$　すなわち　$y=(3a^2-4)x-2a^3$

したがって，$a=-1$ のとき　　$y=-x+2$

$a=1$ のとき　　　$y=-x-2$

(2)　P$(0,\ 0)$ のときは条件を満たさないから，P$(t,\ -t^2)\ (t \fallingdotseq 0)$ とする。

$y=-x^2$ より $y'=-2x$ であるから，点 P における接線の傾きは　　$-2t$

よって，点 P における接線に垂直な直線の方程式は　　$y=\frac{1}{2t}(x-t)-t^2$

この直線が Q$(-5,\ 1)$ を通るとき　　$1=\frac{1}{2t}(-5-t)-t^2$

整理すると　　$2t^3+3t+5=0$

左辺を因数分解して　　$(t+1)(2t^2-2t+5)=0$

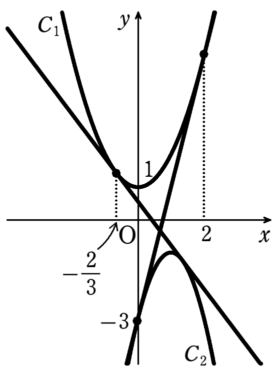
$2t^2-2t+5=0$　より　$t=\frac{1\pm 3i}{2}$ であるから　　$t=-1$

したがって　　P$(-1,\ -1)$

9．2 つの放物線 C_1：$y=x^2+1$，C_2：$y=-2x^2+4x-3$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$y=4x-3$，$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

解説



[解法 1]　$y=x^2+1$ から　　$y'=2x$

C_1 上の点 $(a,\ a^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

すなわち　　$y=2ax-a^2+1$　……①

直線 ① が C_2 に接するための条件は，y を消去した x の 2 次方程式

$$-2x^2+4x-3=2ax-a^2+1$$

すなわち　　$2x^2+2(a-2)x+(4-a^2)=0$

が重解をもつことである。

よって，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-2(4-a^2)=0$$

ゆえに　　$3a^2-4a-4=0$　　　よって　　$(a-2)(3a+2)=0$

これを解くと　　$a=2,\ -\frac{2}{3}$

① から，求める方程式は

$a=2$ のとき　　$y=4x-3$，

$a=-\frac{2}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$

[解法 2]　([解法 1] と 4 行目まで同じ)

$y=-2x^2+4x-3$ から　　$y'=-4x+4$

C_2 上の点 $(b,\ -2b^2+4b-3)$ における接線の方程式は

$$y-(-2b^2+4b-3)=(-4b+4)(x-b)$$

すなわち　　$y=(-4b+4)x+2b^2-3$　……②

① と ② が一致するための条件は

$2a=-4b+4$ ……③　かつ　$-a^2+1=2b^2-3$ ……④

③ から　　$a=-2(b-1)$

④ に代入して　　$-4(b^2-2b+1)+1=2b^2-3$

よって　　$-2b(3b-4)=0$　　　ゆえに　　$b=0,\ \frac{4}{3}$

② から，求める方程式は

$b=0$ のとき　　$y=4x-3$，

$b=\frac{4}{3}$ のとき　　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{9}$