数学演習（微分法）Ｈ２３．７．２２　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

２．定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。　$f(x)=x^2-4x+1$

３．x 座標が与えられた，次の曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

$y=x^3+x^2-2$　$(x=-1)$

４．曲線 $y=-x^2+x-3$ に点 $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

５．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき，定数 a，b の値と $f(x)$ の極大値を求めよ。

６．関数 $g(x)=x^3-x^2+ax+2$ が極値をもたないような，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

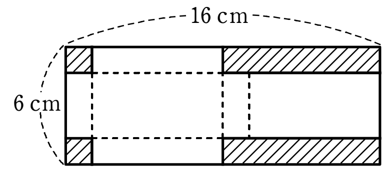
7．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=-2x^3+3x^2+12x-3 \quad (-2\leqq x\leqq 1)$$

8．$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。　$2x^3+\dfrac{1}{9}>x^2$

9．方程式 $2x^3-9x^2+a=0$ が異なる3個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

10．辺の長さが 6 cm と 16 cm の長方形のボール紙がある。図の斜線部分を切り取り，点線に沿って折り曲げてふたつきの箱を作る。この箱の最大容積を求めよ。



数学演習（微分法）Ｈ２３．７．２２　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

１．関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

解答　$2(b+a)$

解説

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2b^2-2a^2}{b-a}=\frac{2(b+a)(b-a)}{b-a}=2(b+a)$$

２．定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。　$f(x)=x^2-4x+1$

解答　$f'(x)=2x-4$

解説

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$　であるから，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2-4(x+h)+1\}-(x^2-4x+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x-4)h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x-4+h)=2x-4$$

３．x 座標が与えられた，次の曲線上の点における接線の方程式を求めよ。

$y=x^3+x^2-2$　$(x=-1)$

解答　$y=x-1$

解説

$y'=3x^2+2x$ であるから，$x=-1$ における接線の傾きは

$3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)=1$

$x=-1$ のとき　$y=(-1)^3+(-1)^2-2=-2$ であるから，接線の方程式は

$y-(-2)=x-(-1)$

すなわち　$y=x-1$

４．曲線 $y=-x^2+x-3$ に点 $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答　$y=3x-2$，$(-1,\ -5)$；$y=-5x+6$，$(3,\ -9)$

解説

$y'=-2x+1$

接点の座標を $(a,\ -a^2+a-3)$ とすると，接線の方程式は

$y-(-a^2+a-3)=(-2a+1)(x-a)$

すなわち　$y=(-2a+1)x+a^2-3$　……①

この直線が点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=(-2a+1)\cdot 1+a^2-3$

よって　$a^2-2a-3=0$

これを解いて　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -5)$

①から，接線の方程式は　$y=3x-2$

$a=3$ のとき，接点の座標は　$(3,\ -9)$

①から，接線の方程式は　$y=-5x+6$

５．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき，定数 a，b の値と $f(x)$ の極大値を求めよ。

解答　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ のとき極大値 6

解説

$f'(x)=3x^2-6x+a$

$x=3$ で極小値 -26 をとるから　$f'(3)=0$，$f(3)=-26$

よって　$9+a=0$，$3a+b=-26$

これを解いて　$a=-9$，$b=1$

このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 6	$\searrow$	極小 -26	$\nearrow$

以上から　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ のとき極大値 6

６．関数 $g(x)=x^3-x^2+ax+2$ が極値をもたないような，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

解答　$a\geqq\frac{1}{3}$

解説

$g(x)=x^3-x^2+ax+2$ から　$g'(x)=3x^2-2x+a$

$g(x)$ が極値をもたないための条件は，2 次方程式 $3x^2-2x+a=0$ が実数解を 1 つだけもつ，または実数解をもたないことである。

よって，判別式 D について　$\frac{D}{4}=(-1)^2-3a\leqq 0$

ゆえに　$a\geqq\frac{1}{3}$

７．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$y=-2x^3+3x^2+12x-3$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

解答　$x=1$ のとき最大値 10，$x=-1$ のとき最小値 -10

解説

$y'=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

$-2\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-10	$\nearrow$	10

よって，$x=1$　のとき最大値 10，

$x=-1$ のとき最小値 -10 をとる。

８．$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。　$2x^3+\frac{1}{9}>x^2$

解答　略

解説

$f(x)=2x^3+\frac{1}{9}-x^2$ とすると　$f'(x)=6x^2-2x=2x(3x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ \frac{1}{3}$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$

よって，$x>0$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\frac{1}{3}$ で最小値 $\frac{2}{27}$ をとる。

したがって，$x>0$ のとき，$f(x)>0$ であるから

$2x^3+\frac{1}{9}-x^2>0$　すなわち　$2x^3+\frac{1}{9}>x^2$

９．方程式 $2x^3-9x^2+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$0<a<27$

解説

方程式を変形すると　$-2x^3+9x^2=a$

$f(x)=-2x^3+9x^2$ とおくと　$f'(x)=-6x^2+18x=-6x(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 3$

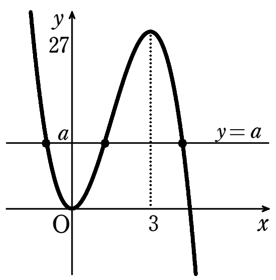
$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 27	$\searrow$

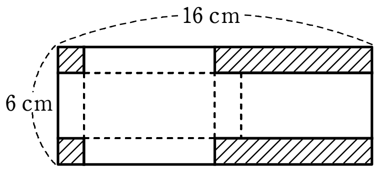
よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから，図より

$0<a<27$



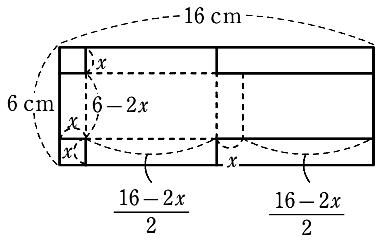
10. 辺の長さが 6 cm と 16 cm の長方形のボール紙がある。図の斜線部分を切り取り，点線に沿って折り曲げてふたつきの箱を作る。この箱の最大容積を求めよ。



解答　$\dfrac{800}{27}$ cm^3

解説

箱の高さを x cm，容積を V cm^3 とすると



$$V=x(6-2x)\frac{16-2x}{2}$$
$$=2x(x-3)(x-8)$$
$$=2(x^3-11x^2+24x)$$

ただし，$x>0$，$6-2x>0$，$\dfrac{16-2x}{2}>0$ から

$$0<x<3$$

V を x で微分すると

$$V'=2(3x^2-22x+24)=2(x-6)(3x-4)$$

$V'=0$ とすると，$0<x<3$ であるから　$x=\dfrac{4}{3}$

$0<x<3$ における V の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	3
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，V は，$x=\dfrac{4}{3}$ のとき極大かつ最大となり，その最大値は

$$2\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-3\right)\left(\frac{4}{3}-8\right)=2\cdot\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{20}{3}\right)=\frac{800}{27}$$

ゆえに，箱の最大容積は　$\dfrac{800}{27}$ cm^3