数学演習（微分法）Ｈ２３．６．２８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．導関数の定義にしたがって，関数 $y=x^3-2x^2-4$ の導関数を求めよ。

２．曲線 $y=x(x-2)^2$ に，点 $(0,\ -18)$ から引いた接線 ℓ の方程式を求めよ。

３．関数 $y=x^3+3x^2+3x+3$ の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

４．$f(x)=x^3+ax^2-3x+b$ とする。$f(x)$ は $x=1$ で極小になり，$x=c$ で極大値 5 をとる。定数 a，b，c の値と $f(x)$ の極小値をそれぞれ求めよ。

５．関数 $y=2x^3-x^2-4x$ の区間 $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

６．3 次方程式 $x^3-3x-2-a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a によってどのように変わるかを調べよ。

7．関数 $f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

8．次の不等式を証明せよ。

(1)　$x\geqq 0$ のとき　$x^3>3x^2-5$

(2)　$x>0$ のとき　$x^3-3x^2+4x+1>0$

9．$a>0$ とする。関数 $f(x)=ax(x-3)^2+b$ の区間 $0\leqq x\leqq 5$ における最大値が 15，最小値が -5 であるという。定数 a，b の値を求めよ。

10．曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A$(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

11．a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

数学演習（微分法）Ｈ２３．６．２８　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．導関数の定義にしたがって，関数 $y=x^3-2x^2-4$ の導関数を求めよ。

解答　$y'=3x^2-4x$

解説

$f(x)=x^3-2x^2-4$ とすると

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-2(x+h)^2-4-(x^3-2x^2-4)$$
$$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2(x^2+2xh+h^2)-4-x^3+2x^2+4$$
$$=h(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)$$

よって　$y'=f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2-4x-2h)$$
$$=3x^2-4x$$

2．曲線 $y=x(x-2)^2$ に，点 $(0,\ -18)$ から引いた接線 ℓ の方程式を求めよ。

解答　$y=7x-18$

解説

$f(x)=x(x-2)^2$ とおくと　$f(x)=x^3-4x^2+4x$

よって　$f'(x)=3x^2-8x+4$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-(a^3-4a^2+4a)=(3a^2-8a+4)(x-a)$$

この直線が点 $(0,\ -18)$ を通るとすると

$$-18-(a^3-4a^2+4a)=(3a^2-8a+4)(0-a)$$

整理して　$a^3-2a^2-9=0$　……①

$P(a)=a^3-2a^2-9$ とおくと

$$P(3)=3^3-2\cdot3^2-9=0$$

ゆえに，$P(a)$ は $a-3$ で割り切れ，方程式①は

$$(a-3)(a^2+a+3)=0$$

$a^2+a+3=0$　より　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot3}}{2}$　虚数解となり不適であるから

$$a=3$$

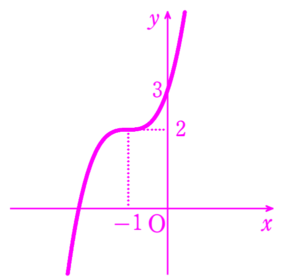
したがって，接線 ℓ の方程式は

$$y-(3^3-4\cdot3^2+4\cdot3)=(3\cdot3^2-8\cdot3+4)(x-3)$$

すなわち　$y=7x-18$

3．関数 $y=x^3+3x^2+3x+3$ の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解答　極値をもたない［図］



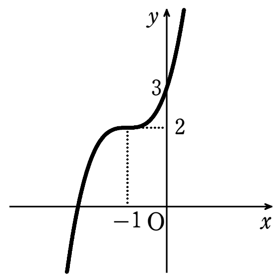
解説

$y'=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$

$y'=0$ とすると　$x=-1$

y の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……
y'	$+$	0	$+$
y	↗	2	↗



よって，y は単調に増加し，極値をもたない。

また，グラフは図のようになる。

4．$f(x)=x^3+ax^2-3x+b$ とする。$f(x)$ は $x=1$ で極小になり，$x=c$ で極大値 5 をとる。定数 a，b，c の値と $f(x)$ の極小値をそれぞれ求めよ。

解答　$a=0$，$b=3$，$c=-1$；極小値 1

解説

与えられた関数を微分すると　$f'(x)=3x^2+2ax-3$

$f(x)$ は $x=1$ で極値をとるから　$f'(1)=0$

よって　$3\cdot1^2+2a\cdot1-3=0$　ゆえに　$a=0$　……①

このとき　$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	……	-1	……	1	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $x=-1$ で極大，

$x=1$ で極小になる。

ゆえに　$c=-1$

また，①から　$f(x)=x^3-3x+b$

条件より，$f(-1)=5$ であるから　$(-1)^3-3(-1)+b=5$

したがって　$b=3$

よって，極小値は　$f(1)=1^3-3\cdot1+3=1$

以上から　$a=0$，$b=3$，$c=-1$；極小値 1

5．関数 $y=2x^3-x^2-4x$ の区間 $-1\leqq x\leqq2$ における最大値と最小値を求めよ。

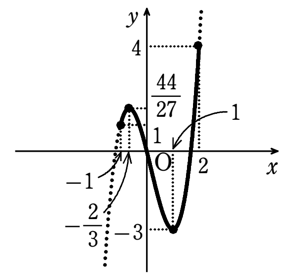
解答　$x=2$ で最大値 4，$x=1$ で最小値 -3

解説

$y'=6x^2-2x-4=2(3x^2-x-2)=2(x-1)(3x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ -\dfrac{2}{3}$

$-1\leqq x\leqq2$ における y の増減表は次のようになる。



x	-1	…	$-\frac{2}{3}$	…	1	…	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\frac{44}{27}$	↘	極小 -3	↗	4

よって，$x=2$ で最大値 4，$x=1$ で最小値 -3 をとる。

6．3次方程式 $x^3-3x-2-a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a によってどのように変わるかを調べよ。

解答　$a<-4$，$0<a$ のとき 1 個；$a=-4$，0 のとき 2 個；

$-4<a<0$ のとき 3 個

解説

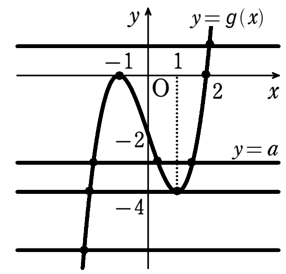
方程式を変形して　$x^3-3x-2=a$

$g(x)=x^3-3x-2$ とすると

$$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=\pm1$

$g(x)$ の増減表は次のようになる。



x	……	-1	……	1	……
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

よって，$y=g(x)$ のグラフは上の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の実数解の個数に一致するから

$a<-4$，$0<a$　のとき　1 個；

$a=-4$，0　のとき　2 個；

$-4<a<0$　のとき　3 個

7．関数 $f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a<3$，$6<a$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+3a-6$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，$f'(x)=0$ すなわち

$3x^2+2ax+3a-6=0$ ……①が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって，①の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-3(3a-6)>0$　　整理して　$(a-3)(a-6)>0$

これを解いて　$a<3$，$6<a$

8．次の不等式を証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$x^3>3x^2-5$　　　(2)　$x>0$ のとき　$x^3-3x^2+4x+1>0$

解答　(1)　略　　(2)　略

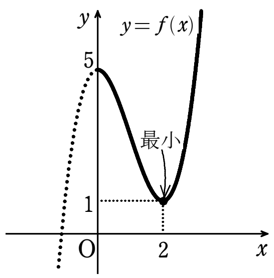
解説

(1)　$f(x)=x^3-(3x^2-5)$ とすると

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	2	……
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	5	↘	極小 1	↗



よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき $x=2$ で最小値1をとるから，$x \geqq 0$ のとき　　$f(x)>0$

したがって，$x \geqq 0$ のとき $x^3>3x^2-5$ が成り立つ。

(2)　$f(x)=x^3-3x^2+4x+1$ とすると

$$f'(x)=3x^2-6x+4$$

ここで $f'(x)=0$　となる x は

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-3\cdot4}}{3}$　より虚数解となる。

つまり，$f'(x)$のグラフは常に x 軸の上にあるので

常に　　$f'(x)>0$

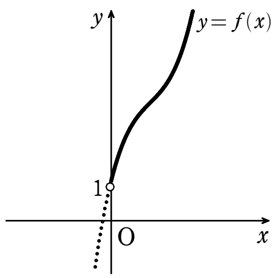
ゆえに，$f(x)$ は単調に増加する。

$f(0)=1$ であるから，

$x>0$ のとき　　$f(x)>0$

すなわち，$x>0$ のとき

$x^3-3x^2+4x+1>0$ が成り立つ。



9．$a>0$ とする。関数 $f(x)=ax(x-3)^2+b$ の区間 $0 \leqq x \leqq 5$ における最大値が 15，最小値が -5 であるという。定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=-5$

解説

$f(x)=ax(x-3)^2+b=ax^3-6ax^2+9ax+b$

よって　　$f'(x)=3ax^2-12ax+9a=3a(x^2-4x+3)$

$\qquad=3a(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$，3

また　　$f(0)=b$，$f(1)=4a+b$，$f(3)=b$，$f(5)=20a+b$

$a>0$ であるから，$0 \leqq x \leqq 5$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	1	……	3	……	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↗	極大 $4a+b$	↘	極小 b	↗	$20a+b$

$a>0$ であるから　　$4a+b<20a+b$

よって，最大値は　　$20a+b$

また，最小値は　　$f(0)=f(3)=b$

ゆえに　　$20a+b=15$ ……①，　$b=-5$ ……②

② を ① に代入して　　$20a=20$　　　よって　　$a=1$

これは $a>0$ を満たす。

したがって　　$a=1$，$b=-5$

10. 曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A $(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-7<a<20$

解説

$y=x^3-9x^2+15x-7$ から　　$y'=3x^2-18x+15$

曲線上の点 $(t,\ t^3-9t^2+15t-7)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(x-t)$$

この直線が点 A $(0,\ a)$ を通るとき

$$a-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(-t)$$

よって　　$-2t^3+9t^2-7=a$　……①

また，3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線も異なる。

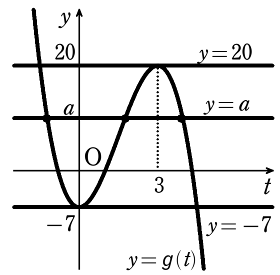
ゆえに，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつとき，点 A から曲線に 3 本の接線が引ける。

ここで，$g(t)=-2t^3+9t^2-7$ とすると

$$g'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	……	0	……	3	……
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	極小 -7	↗	極大 20	↘



よって，$y=g(t)$ のグラフは右の図のようになる。

① の異なる実数解の個数，すなわち $y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数が 3 となるような a の値の範囲は　　$-7<a<20$

11. a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

解答　$0<a<\dfrac{3}{4}$，$3<a$ のとき　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4} \leqq a \leqq 3$ のとき　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$

解説

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

$\quad=(3x-a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{a}{3}$，a

$a>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	…	$\dfrac{a}{3}$	…	a	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{4}{27}a^3$	↘	極小 0	↗

ここで，$x=\dfrac{a}{3}$ 以外に $f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ を満たす x の値を求めると，$f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ から　　$x^3-2ax^2+a^2x-\dfrac{4}{27}a^3=0$

ゆえに　　$\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)=0$　　　$x \neq \dfrac{a}{3}$ であるから　　$x=\dfrac{4}{3}a$

したがって，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値 $M(a)$ は

[1]　$1<\dfrac{a}{3}$　すなわち　$a>3$ のとき

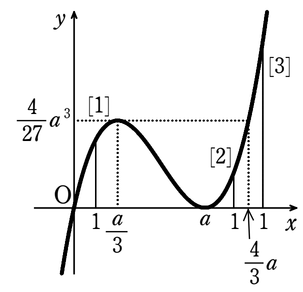
$M(a)=f(1)$

[2]　$\dfrac{a}{3} \leqq 1 \leqq \dfrac{4}{3}a$　すなわち　$\dfrac{3}{4} \leqq a \leqq 3$ のとき

$M(a)=f\left(\dfrac{a}{3}\right)$

[3]　$0<\dfrac{4}{3}a<1$　すなわち　$0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき

$M(a)=f(1)$



以上から　　$0<a<\dfrac{3}{4}$，$3<a$ のとき　　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4} \leqq a \leqq 3$ のとき　　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$