統一テスト（微分法）Ｈ２３．９．１５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．$a<b$ とする。関数 $f(x)=-x^2+2x+3$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率を求めよ。

２．関数 $f(x)=x^3-x^2$ の $x=a$ における微分係数を定義に従って求めよ。

３．関数 $y=-2x^2+4x+1$ のグラフについて，次の接線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ 1)$ における接線

(2)　x 軸に平行な接線

４．関数 $y=-x^2+x-3$ のグラフに点 C $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

５．次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-1)^2(x+2)$

(2)　$y=-2x^3-6x^2-6x$

6．関数 $f(x)=x^3+ax^2-ax+1$ が常に増加するように定数 a の値の範囲を定めよ。

7．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ は，$x=3$ で極小値 -26 をとる。このとき，定数 a，b の値を求めよ。また，極大値を求めよ。

8．次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=x^3+3x^2-9x$ $(-4\leqq x\leqq 3)$

9．3 次方程式 $x^3+3x^2+a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a のとる値によって，どのように変わるか調べよ。

10．次の不等式が成り立つことを証明せよ。　$x\geqq 0$ のとき　$2x^3+\dfrac{1}{27}\geqq x^2$

11．点A $(0,\ a)$ から曲線 C : $y=x^3-9x^2+15x-7$ に異なる 3 本の接線を引くことができるような定数 a の値の範囲を定めよ。

1．$a<b$ とする。関数 $f(x)=-x^2+2x+3$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率を求めよ。

解答　$-2-h$

解説

$$f(2+h)-f(2)=\{-(2+h)^2+2(2+h)+3\}-(-2^2+2\cdot 2+3)$$
$$=-4h-h^2+2h$$
$$=-2h-h^2$$

よって，求める平均変化率は

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\frac{-2h-h^2}{h}=-2-h$$

2．関数 $f(x)=x^3-x^2$ の $x=a$ における微分係数を定義に従って求めよ。

解答　$f'(a)=2a-6$

解説

$$f(a+h)-f(a)=\{(a+h)^2-6(a+h)+7\}-(a^2-6a+7)$$
$$=2ah+h^2-6h=(2a-6)h+h^2$$

よって，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2a-6)h+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{(2a-6)+h\}=2a-6$$

3．関数 $y=-2x^2+4x+1$ のグラフについて，次の接線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ 1)$ における接線　　(2)　x 軸に平行な接線

解答　(1)　$y=4x+1$　　(2)　$y=-4x+9$

解説

$f(x)=-2x^2+4x+1$ とすると　$f'(x)=-4x+4$

(1)　$f'(0)=4$ であるから，求める方程式は

$$y-1=4(x-0)$$

すなわち　$y=4x+1$

(2)　接点の x 座標を a とし，$f'(a)=-4$ とすると

$$-4a+4=-4$$

ゆえに　$a=2$　また　$f(2)=1$

よって，求める方程式は

$$y-1=-4(x-2)$$

すなわち　$y=-4x+9$

4．関数 $y=-x^2+x-3$ のグラフに点 C $(1,\ 1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x,\ y=3x-4$

解説

$f(x)=x^2-x$ とすると　$f'(x)=2x-1$

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

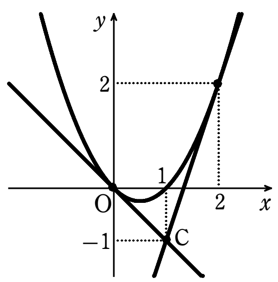
$$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$$

すなわち　$y=(2a-1)x-a^2$ ……①

この直線が点 C $(1,\ -1)$ を通るから

$$-1=(2a-1)\cdot 1-a^2$$

整理すると　$a^2-2a=0$



ゆえに　$a(a-2)=0$

よって　$a=0,\ 2$

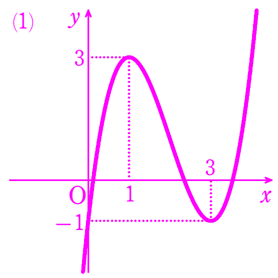
したがって，求める接線の方程式は，① から

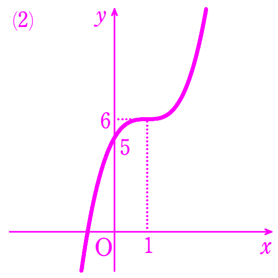
$a=0$ のとき　$y=-x$，$a=2$ のとき　$y=3x-4$

5．次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-1)^2(x+2)$　　(2)　$y=-2x^3-6x^2-6x$

解答　(1)　$x=1$ で極大値 3，$x=3$ で極小値 -1　[図]　　(2)　極値はない　[図]





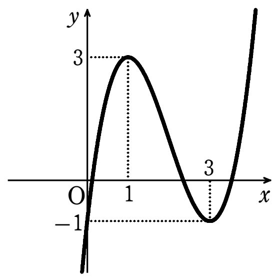
解説

(1)　$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	1	…	3	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 −1	↗



よって，$x=1$ で極大値 3，$x=3$ で極小値 -1 をとる。

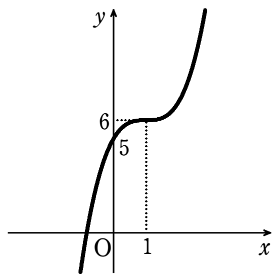
また，グラフは [図]

(2)　$y'=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	1	…
y'	+	0	+
y	↗	6	↗



すべての実数について $y'\geqq 0$ であるから，y は常に増加する。

よって，極値はない。

また，グラフは [図]

6．関数 $f(x)=x^3+ax^2-ax+1$ が常に増加するように定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$a<3,\ 6<a$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+3a-6$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，$f'(x)=0$ すなわち

$3x^2+2ax+3a-6=0$ ……① が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって，① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-3(3a-6)>0$$　　整理して　$(a-3)(a-6)>0$

これを解いて　$a<3,\ 6<a$

7．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ は，$x=3$ で極小値 -26 をとる。このとき，定数 a，b の値を求めよ。また，極大値を求めよ。

解答　$a=-6$，$b=-15$，極小値 -99

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=-1$ で極大値 9 をとるとき

$$f'(-1)=0,\ f(-1)=9$$

したがって　$3-2a+b=0,\ -1+a-b+1=9$

整理して　$2a-b=3,\ a-b=9$

これを解いて　$a=-6,\ b=-15$

このとき　$f(x)=x^3-6x^2-15x+1$

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

よって，右の増減表が得られ，条件を満たす。

以上から　$a=-6,\ b=-15$

極小値 -99

x	…	−1	…	5	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 9	↘	極小 −99	↗

8．次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=x^3+3x^2-9x$ $(-4\leqq x\leqq 3)$

解答　$x=-3,\ 0$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -15

解説

$y'=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=-2,\ 0$

よって，y の増減表は，次のようになる。

x	−3	…	−2	…	0	…	2
y'		−	0	+	0	−	
y	5	↘	1	↗	5	↘	−15

したがって，$x=-3,\ 0$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -15 をとる。

9．3 次方程式 $x^3+3x^2+a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a のとる値によって，どのように変わるか調べよ。

解答　$a<0$，$4<a$ のとき 1 個；$a=0$，4 のとき 2 個；$0<a<4$ のとき 3 個

解説

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ とおくと

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

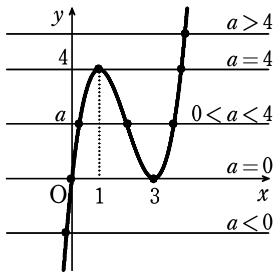
$f'(x)=0$ とすると

$x=1,\ 3$

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

$f(x)$ の増減表と $y=f(x)$ のグラフは，右のようになる。
このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の実数解の個数に一致するから

$a<0,\ 4<a$ のとき　1 個；
$a=0,\ 4$　　のとき　2 個；
$0<a<4$　　のとき　3 個



10. 次の不等式が成り立つことを証明せよ。　　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+\dfrac{1}{27} \geqq x^2$

解答　略

解説

$y=(x^3+16)-12x$ とすると

$y'=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 2$

$x>0$ における y の増減表は，右のようになる。

ゆえに，$x>0$ において，y は $x=2$ で最小値 0 をとる。

よって，$x>0$ のとき　　$y \geqq 0$

したがって　　$x^3-12x+16 \geqq 0$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小 0	↗

11. 点A$(0,\ a)$ から曲線C：$y=x^3-9x^2+15x-7$ に異なる 3 本の接線を引くことができるような定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$a<2$ のとき $-a^3+6a^2$，$a>2$ のとき $12a-8$

解説

[1]　$a<2$ のとき

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，極大値は　$f(a)=-a^3+6a^2$

[2]　$a>2$ のとき

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，極大値は　$f(2)=12a-8$