数学演習（微分法）Ｈ２４．６．１３　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

２．**導関数の定義に従って**，関数 $f(x)=x^3-3x$ の導関数を求めよ。

３．関数 $f(x)=4x^3-3x^2+2$ について，次の値を求めよ。

(1)　$f'(0)$　　　(2)　$f'(2)$

４．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x+1)^2$　　　(2)　$y=(x+2)(x-1)(x-5)$

５．曲線 $y=-x^3+5x$ について，曲線上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ。

６．関数 $y=x^2+1$ のグラフに点 $(2,\ 1)$ から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

7．関数 $y=x^3+3x^2-9x-11$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

8．関数 $f(x)=x^3+kx^2+2x+3$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ。

9．関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で極大値 4 をとり，$x=1$ で極小値をとる。
定数 a，b，c の値と極小値を求めよ。

10. 関数 $y=x^3-3x^2+4$ の $-2\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

11. a は定数とする。方程式 $2x^3-6x+a=0$ のが異なる3個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

12. $x\geqq 0$ のとき $x^3+2\geqq 3x$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはいつか。

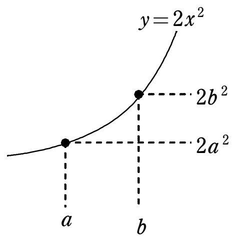
数学演習（微分法）Ｈ２４．６．１３　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．関数 $f(x)=2x^2$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq b$ とする。

解答　$2(b+a)$

解説

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{2b^2-2a^2}{b-a}$$
$$=\frac{2(b+a)(b-a)}{b-a}$$
$$=2(b+a)$$

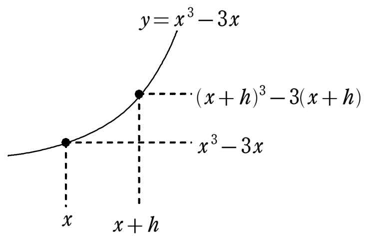


２．導関数の定義に従って，関数 $f(x)=x^3-3x$ の導関数を求めよ。

解答　$f'(x)=3x^2-3$

解説

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3-3(x+h)\}-(x^3-3x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(3x^2-3)h+3xh^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3x^2-3+3xh+h^2)$$
$$=3x^2-3$$



参考　導関数の公式　$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

３．関数 $f(x)=4x^3-3x^2+2$ について，次の値を求めよ。

(1)　$f'(0)$　　(2)　$f'(2)$

解答　(1)　0　　(2)　36

解説

微分すると $f'(x)=4\cdot3x^2-3\cdot2x=12x^2-6x$　より，この式に代入する

(1)　$f'(0)=12\cdot0^2-6\cdot0=0$　　(2)　$f'(2)=12\cdot2^2-6\cdot2=36$

４．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x+1)^2$　　(2)　$y=(x+2)(x-1)(x-5)$

解答　(1)　$y'=18x+6$　　(2)　$y'=3x^2-8x-7$

解説

(1)　展開して　$(3x+1)^2=(3x)^2+2\cdot3x\cdot1+1^2=9x^2+6x+1$

よって　$y=9x^2+6x+1$　　したがって　$y'=9\cdot2x+6=18x+6$

(2)　展開して $(x+2)(x-1)(x-5)=(x+2)(x^2-6x+5)=x(x^2-6x+5)+2(x^2-6x+5)$

$=x^3-4x^2-7x+10$

よって　$y=x^3-4x^2-7x+10$

したがって　$y'=3x^2-4\cdot2x-7=3x^2-8x-7$

５．曲線 $y=-x^3+5x$ について，曲線上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x+2$

解説

$y'=-3x^2+5$ であるから，点 $(1,\ 4)$ における接線の傾きは　$x=1$ を y' に代入して

$y'=-3\cdot1^2+5=2$

よって，接線の方程式は　点 $(1,\ 4)$ を通り，傾き2なので

$y-4=2(x-1)$　すなわち　$y=2x+2$

参考　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は　$y-y_1=m(x-x_1)$

６．関数 $y=x^2+1$ のグラフに点 $(2,\ 1)$ から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答　$y=1$　接点　$(0,1)$　，$y=8x-15$　接点　$(4,17)$

解説

$y=x^2+1$ を微分すると　$y'=2x$

接点の座標を $(a,\ a^2+1)$ とすると，接線の傾きは　y' に $x=a$ を代入して　$2a$

よって，接線の方程式は

$y-(a^2+1)=2a(x-a)$　……①

この直線が点 $(2,\ 1)$ を通るから

$1-(a^2+1)=2a(2-a)$

よって　$a^2-4a=0$

すなわち　$a(a-4)=0$

ゆえに　$a=0,\ 4$

したがって，接線の方程式は，① より

$a=0$ のとき

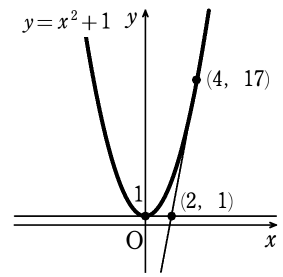
接点は $(a,\ a^2+1)$ より　$(0,0^2+1)$　つまり　$(0,1)$

また，①に $a=0$ を代入して　$y-1=0$　すなわち　$y=1$

$a=4$ のとき

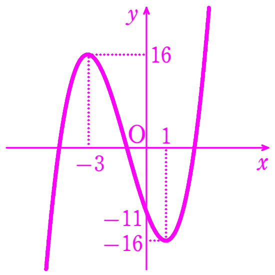
接点は $(a,\ a^2+1)$ より　$(4,4^2+1)$　つまり　$(4,17)$

また，①に $a=4$ を代入して　$y-17=8(x-4)$　すなわち　$y=8x-15$

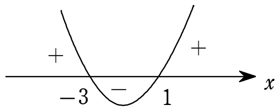


7．関数 $y=x^3+3x^2-9x-11$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

解答　$x=-3$ で極大値 16，　$x=1$ で極小値 -16
グラフは［図］



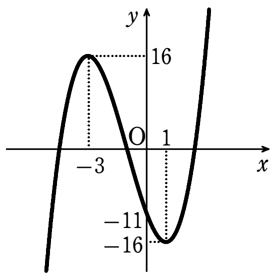
解説
$y'=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)$



$y'=0$ とすると　　$x=-3,\ 1$
y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	16	↘	-16	↗

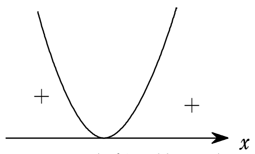
よって，この関数は $x=-3$ で極大値 16,
$x=1$ で極小値 -16 をとる。
また，グラフは右の図のようになる。



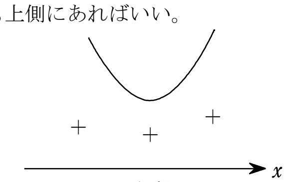
8．関数 $f(x)=x^3+kx^2+2x+3$ が常に増加するように，定数 k の値の範囲を定めよ。

解答　$-\sqrt{6}\leqq k\leqq\sqrt{6}$

解説
$f(x)=x^3+kx^2+2x+3$ を微分すると　　$f'(x)=3x^2+2kx+2$
$f(x)$ が常に増加するための条件は，すべての実数 x について $f'(x)\geqq 0$ が成り立つことである。つまり，$y=f'(x)$のグラフがx軸よりも上側にあればいい。



$D=0$　（x軸に接する）



$D<0$　（x軸と交わらない）

よって，2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると　　$D\leqq 0$　であればいい
$D=(2k)^2-4\cdot 3\cdot 2=4(k^2-6)$ であるから　$4(k^2-6)\leqq 0$　より　　$k^2-6\leqq 0$
したがって　因数分解して　$(k+\sqrt{6})(k-\sqrt{6})\leqq 0$　より　$-\sqrt{6}\leqq k\leqq\sqrt{6}$

9．関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で極大値 4 をとり，$x=1$ で極小値をとる。定数 a，b，c の値と極小値を求めよ。

解答　$a=0$，$b=-3$，$c=2$；極小値 0

解説
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を微分すると　　$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f(x)$ が $x=-1$ で極大値 4 をとるから
$x=-1$のときの$f(x)$の計算結果は 4　であり，
また$x=-1$における接線の傾き，つまり　$f'(x)$の計算結果は 0 である。
したがって
$f'(-1)=0$，$f(-1)=4$
よって　$f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+c$　より　$-1+a-b+c=4$
また　　$f'(-1)=3(-1)^2+2a(-1)+b$　　より　$3-2a+b=0$
以上より　　$3-2a+b=0$　…… ①，　　$-1+a-b+c=4$　…… ②
$f(x)$ が $x=1$ で極小値をとるから，同様に考えて　　$f'(1)=0$
よって　　$3+2a+b=0$　…… ③
①，③ のa と b の連立方程式を解いて　$a=0$，$b=-3$
これらを②に代入して　$c=2$
以上より　$a=0$，$b=-3$，$c=2$
このとき
$f(x)=x^3-3x+2$
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
したがって，右の増減表が得られるから，
$f(x)$ は条件を満たす。
よって　　$a=0$，$b=-3$，$c=2$
極小値 0

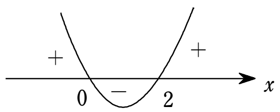
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

注意　a , b , cの値を求めたあと，本当に$x=-1$で極大，$x=1$で極小になることを，増減表を書いて確かめなければならない。

10．関数 $y=x^3-3x^2+4$ の$-2\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答　$x=0$，3 のとき最大値 4，$x=-2$ のとき最小値 -16

解説
$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$



$y'=0$ とすると　　$x=0$，2
$-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-16	↗	4	↘	0	↗	4

よって，$x=0$，3 のとき最大値 4,
$x=-2$　のとき最小値 -16 をとる。

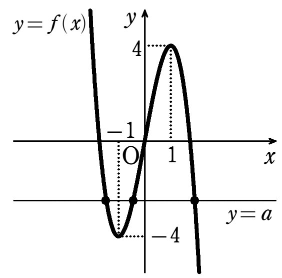
11．a は定数とする。方程式 $2x^3-6x+a=0$ が異なる3個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

解答　$-4<a<4$

解説
方程式を変形すると　　$-2x^3+6x=a$
$f(x)=-2x^3+6x$ とすると
$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	4	↘

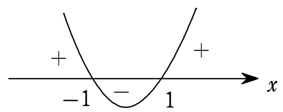
よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。
このグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数が，求める方程式の実数解の個数に等しいからグラフより
$-4<a<4$



12．$x\geqq 0$ のとき　$x^3+2\geqq 3x$　が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはいつか。

解答　略，等号は$x=1$のとき

解説
$f(x)=(x^3+2)-3x$ とすると
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$



$x\geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は下のようになる。
よって，$x\geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとる。
したがって，$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq 0$ であるから
$(x^3+2)-3x\geqq 0$　　すなわち　　$x^3+2\geqq 3x$
また等号は，$f(x)=0$のとき，つまり増減表より$x=1$のときである。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	0	↗