数学演習（微分法）Ｈ２１．９．１８　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１. 関数 $f(x)=-x^2+2x+3$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率を求めよ。

２. 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。　$f(x)=x^3-x$

３. 関数 $y=x^2-x$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

４. 関数 $y=x^2-x$ のグラフに点 C $(1,\ -1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

５. 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ は，$x=-1$ で極大値 9 をとる。このとき，定数 a，b の値を求めよ。また，極小値を求めよ。

６. 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^3-6x^2+9x-1$　　(2)　$y=x^3-3x^2+3x+5$

７. 関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+a$ が極大値と極小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

８. 関数 $f(x)=ax^3+3ax^2+b\ (-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 10，最小値が -10 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

９. 3 次方程式 $x^3-6x^2+9x-a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a のとる値によって，どのように変わるか調べよ。

10. $x\geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+5>3x^2$ が成り立つことを証明せよ。

数学演習（微分法）Ｈ２１．９．１８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１. 関数 $f(x)=-x^2+2x+3$ において，x の値が a から b まで変化するときの平均変化率を求めよ。

解答　$-a-b+2$

(1)　$f(b)-f(a)=(-b^2+2b+3)-(-a^2+2a+3)$

$=-(b^2-a^2)+2(b-a)$

$=-(b+a)(b-a)+2(b-a)$

$=(b-a)(-a-b+2)$

よって，平均変化率は　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{(b-a)(-a-b+2)}{b-a}=-a-b+2$

２. 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。　$f(x)=x^3-x$

解答　$f'(x)=3x^2-1$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3-(x+h)\}-(x^3-x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3-\{(x+h)-x\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h}=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2-1)=3x^2-1$$

３. 関数 $y=x^2-x$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=x-1$

$f(x)=x^2-x$ とすると　$f'(x)=2x-1$

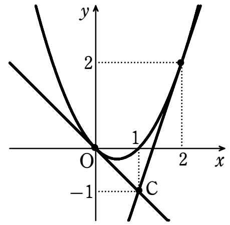
よって　$f'(1)=2\cdot1-1=1$

したがって，点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式は

$y-0=1\cdot(x-1)$　すなわち　$y=x-1$

４. 関数 $y=x^2-x$ のグラフに点 C $(1,\ -1)$ から引いた接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

解答　$y=-x$ ：$(0,\ 0)$，$y=3x-4$ ：$(2,\ 2)$



$f(x)=x^2-x$ とすると　$f'(x)=2x-1$

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-1)x-a^2$ ……①

この直線が点 C $(1,\ -1)$ を通るから

$-1=(2a-1)\cdot1-a^2$

整理すると　$a^2-2a=0$

ゆえに　$a(a-2)=0$

よって　$a=0,\ 2$

したがって，求める接線の方程式は，① から

$a=0$ のとき　$y=-x$　接点の座標は $(0,\ 0)$

$a=2$ のとき　$y=3x-4$　接点の座標は $(2,\ 2)$

５. 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ は，$x=-1$ で極大値 9 をとる。このとき，定数 a，b の値を求めよ。また，極小値を求めよ。

解答　$a=-6$，$b=-15$，極小値 -99

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=-1$ で極大値 9 をとるとき

$f'(-1)=0$，$f(-1)=9$

したがって　$3-2a+b=0$，$-1+a-b+1=9$

整理して　$2a-b=3$，$a-b=9$

これを解いて　$a=-6$，$b=-15$

このとき　$f(x)=x^3-6x^2-15x+1$

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

よって，右の増減表が得られ，条件を満たす。

以上から　$a=-6$，$b=-15$

極小値 -99

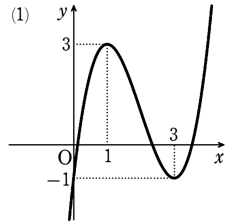
x	…	-1	…	5	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 9	↘	極小 -99	↗

６. 次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

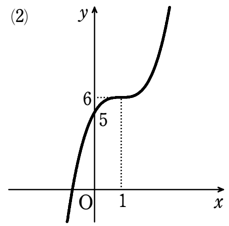
(1)　$y=x^3-6x^2+9x-1$　　(2)　$y=x^3-3x^2+3x+5$

解答　(1)　$x=1$ で極大値 3，$x=3$ で極小値 -1　[図]　(2)　極値はない　[図]

(1)



(2)

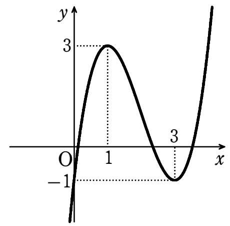


(1)　$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	1	…	3	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



よって，$x=1$ で極大値 3，$x=3$ で極小値 -1 をとる。

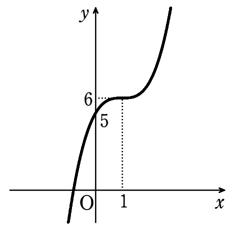
また，グラフは [図]

(2)　$y'=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	1	…
y'	$+$	0	$+$
y	↗	6	↗



すべての実数について $y'\geqq0$ であるから，y は常に増加する。

よって，極値はない。

また，グラフは [図]

７. 関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+a$ が極大値と極小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$a<0$，$3<a$

3 次関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件は，その導関数 $f'(x)$ の符号が正から負に，負から正に変わる点があることである。

よって，2 次方程式 $f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。

したがって，判別式について　$\dfrac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)>0$

これを解いて　$a<0$，$3<a$

8. 関数 $f(x)=ax^3+3ax^2+b\ (-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 10，最小値が -10 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　$(a,\ b)=(1,\ -10),\ (-1,\ 10)$

$f'(x)=3ax^2+6ax=3ax(x+2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ -2$

[1]　$a=0$ のとき　　$f(x)=b$

よって，最大値が 10，最小値が -10 になることはない。

したがって，この場合は不適である。

[2]　$a>0$ のとき

$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-1	……	0	……	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b+2a$	↘	極小 b	↗	$b+20a$

よって，最小値は　　$f(0)=b$

また，$a>0$ より，$b+20a>b+2a$ であるから

最大値は　　$f(2)=b+20a$

したがって　　$b=-10,\ b+20a=10$

これを解いて　　$a=1,\ b=-10$　（$a>0$ を満たす）

[3]　$a<0$ のとき

$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-1	……	0	……	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$b+2a$	↗	極大 b	↘	$b+20a$

よって，最大値は　　$f(0)=b$

また，$a<0$ より，$b+20a<b+2a$ であるから

最小値は　　$f(2)=b+20a$

したがって　　$b=10,\ b+20a=-10$

これを解いて　　$a=-1,\ b=10$　（$a<0$ を満たす）

以上から　　$(a,\ b)=(1,\ -10),\ (-1,\ 10)$

9. 3 次方程式 $x^3-6x^2+9x-a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a のとる値によって，どのように変わるか調べよ。

解答　$a<0,\ 4<a$ のとき 1 個；$a=0,\ 4$ のとき 2 個；$0<a<4$ のとき 3 個

$x^3-6x^2+9x=a$ として

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ とおくと

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると

$x=1,\ 3$

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

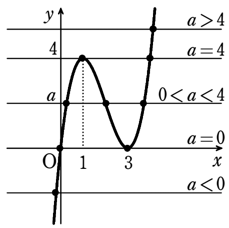
$f(x)$ の増減表と $y=f(x)$ のグラフは，右のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の実数解の個数に一致するから

$a<0,\ 4<a$ のとき　1 個；

$a=0,\ 4$　　のとき　2 個；

$0<a<4$　　のとき　3 個



10. $x\geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+5>3x^2$ が成り立つことを証明せよ。

解答　略

$y=(x^3+5)-3x^2$ とすると　　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

$x\geqq 0$ における y の増減表は，右のようになる。

ゆえに，$x\geqq 0$ において，y は $x=2$ で最小値 1 をとる。

よって，$x\geqq 0$ のとき　　$y>0$

したがって　　$(x^3+5)-3x^2>0$

すなわち　　$x^3+5>3x^2$

x	0	…	2	…
y'		$-$	0	$+$
y	5	↘	極小 1	↗