数学演習（微分法）H２１．２．２８　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１. 関数 $f(x)=x^4$ において，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率を求めよ。

２. 関数 $f(x)=px^2+qx+r$ について，定義に従って微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

３. 恒等式 $f(x)+xf'(x)=6x^2-8x+1$ を満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

４. 次の関数を微分せよ。また，(2) については[ ]内の文字について微分せよ。

(1) $y=(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2) $s=ab+bc+ca$ ，$[a]$

５. 次の曲線上の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $y=2x^2-4x-3$ ，$(-1,3)$

(2) $y=-x^3+x+2$ ，$(1,2)$

６. 曲線 $y=(x-2)^3$ 上の $x=1$ である点における接線の方程式を求めよ。

7. 曲線 $y=-x^3+x$ について，次のものを求めよ。

(1) 傾きが -2 である直線の方程式と接点の座標

(2) x 軸に平行である接線の方程式と接点の座標

8. (1) 点 $(3, 4)$ から，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(2) 曲線 $y=x^3-3x+2$ の接線で，点 $(2, 4)$ を通るものの方程式と接点の座標を求めよ。

数学演習（微分法）Ｈ２１．２．２８ （　　）組（　　）番　名前（ こたえ　）

1．関数 $f(x)=x^4$ において，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率を求めよ。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^4-a^4}{b-a}$$
$$=\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{b-a}$$
$$=\frac{(b-a)(b+a)(b^2+a^2)}{b-a}$$
$$=(b+a)(b^2+a^2)$$
$$=b^3+b^2a+ba^2+a^3$$ 6

2．関数 $f(x)=px^2+qx+r$ について，定義に従って微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{p(a+h)^2+q(a+h)+r-(pa^2+qa+r)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{p\{(a+h)^2-a^2\}+q(a+h-a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{p(a^2+2ah+h^2-a^2)+qh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{p(2ah+h^2)+qh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\{p(2a+h)+q\}=2ap+q$$ 6

3．恒等式 $f(x)+xf'(x)=6x^2-8x+1$ を満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$f'(x)=2ax+b$ となる。

$$f(x)+xf'(x)=ax^2+bx+c+x(2ax+b)$$
$$=ax^2+bx+c+2ax^2+bx$$
$$=3ax^2+2bx+c$$

で，これが $6x^2-8x+1$ に一致するので

$3a=6,\ 2b=-8,\ c=1$

$\therefore\ a=2,\ b=-4,\ c=1$

よって　$f(x)=2x^2-4x+1$ 6

4．次の関数を微分せよ。また，(2)については[ ]内の文字について微分せよ。

(1) $y=(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2) $s=ab+bc+ca$, $[a]$

(1) $y=(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$$=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)\cdot(x+1)(x^2-x+1)$$
$$=(x^3-1)\cdot(x^3+1)=x^6-1$$
$\therefore\ y'=6x^5$ 6

(2) $s'=b+0+c$
$=b+c$ 6

5．次の曲線上の与えられた点における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $y=2x^2-4x-3$, $(-1,3)$

$y'=4x-4$ より

点 $(-1,3)$ における接線の傾きは $4(-1)-4=-8$

$\therefore\ y-3=-8(x+1)$

(接) $y=-8x-5$ 3

また，法線の傾きを m とすると

$m\cdot(-8)=-1$

$\therefore\ m=\frac{1}{8}$

よって $y-3=\frac{1}{8}(x+1)$

(法) $y=\frac{1}{8}x+\frac{25}{8}$ 3

(2) $y=-x^3+x+2$, $(1,2)$

$y'=-3x^2+1$ より

点 $(1,2)$ における接線の傾きは $-3\cdot1^2+1=-2$

$\therefore\ y-2=-2(x-1)$

(接) $y=-2x+4$ 3

また，法線の傾きを m とすると

$m\cdot(-2)=-1$

$\therefore\ m=\frac{1}{2}$

よって $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$

(法) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 3

6．曲線 $y=(x-2)^3$ 上の $x=1$ である点における接線の方程式を求めよ。

$x=1$ の時，$y=(1-2)^3=(-1)^3=-1$

また，$y=(x-2)^3=x^3-3\cdot2\cdot x^2+3\cdot2^2\cdot x-2^3$
$=x^3-6x^2+12x-8$

より　$y'=3x^2-12x+12$

よって $x=1$ の時の接線の傾きは
$y'=3-12+12=3$

ゆえに　$y-(-1)=3(x-1)$
$\therefore\ y=3x-4$ 6

/4

7. 曲線 $y=-x^3+x$ について，次のものを求めよ。

(1) 傾きが -2 である直線の方程式と接点の座標

接点を $(a, -a^3+a)$ とおくと，

$y'=-3x^2+1$ より，この点における

接線の傾きは $-3a^2+1$

求める接線の傾きは -2 より

$-3a^2+1=-2$

$\therefore a^2=1$

$a=\pm 1$

12

・$a=1$ の時，

接点は $(1, 0)$

また，接線の方程式は

$y-0=-2(x-1)$

より

$y=-2x+2$

・$a=-1$ の時

接点は $(-1, 0)$

また，接線の方程式は

$y-0=-2(x+1)$

より

$y=-2x-2$

(2) x 軸に平行である接線の方程式と接点の座標

接点を $(a, -a^3+a)$ とおくと

$y'=-3x^2+1$ より この点における

接線の傾きは $-3a^2+1$

求める接線の傾きは 0 より

$-3a^2+1=0$

$\therefore a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

12

・$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ の時

接点は $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

であり，接線の方程式は

$y=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

・$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ の時

接点は $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

であり，接線の方程式は

$y=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

8. (1) 点 $(3, 4)$ から，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

接点の座標を

$(a, -a^2+4a-3)$

とおくと，$y'=-2x+4$

より，この点における

接線の方程式は

$y-(-a^2+4a-3)=(-2a+4)(x-a)$ …(*)

とおける。この直線は点 $(3, 4)$ を

通るので，

$4-(-a^2+4a-3)=(-2a+4)(3-a)$

整理して

$a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1, 5$

12

・$a=1$ の時，(*) に代入すると

$y-0=2(x-1)$

$\therefore y=2x-2$ で接点は $(1, 0)$

・$a=5$ の時，(*) に代入すると

$y-(-8)=-6(x-5)$

$\therefore y=-6x+22$ で，接点は $(5, -8)$

(2) 曲線 $y=x^3-3x+2$ の接線で，点 $(2, 4)$ を通るものの方程式と接点の座標を求めよ。

接点の座標を

(a, a^3-3a+2)

とおくと，$y'=3x^2-3$ より

この点における接線の

方程式は

$y-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(x-a)$ …(*)

とおける。この直線は点 $(2, 4)$ を通るので

$4-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(2-a)$

16

整理して

$a^3-3a^2+4=0$

(左辺) に $a=-1$ を代入すると

$-1-3+4=0$ より

(左辺) は $a+1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$\therefore$

$a^3-3a^2+4=(a+1)(a^2-4a+4)$

$=(a+1)(a-2)^2=0$ $\therefore a=-1, 2$

・$a=-1$ の時，(*) に代入すると

$y-4=0\cdot(x+1)$ より $y=4$

また，接点は $(-1, 4)$

・$a=2$ の時，(*) に代入すると

$y-4=9(x-2)$ より $y=9x-14$

また，接点は $(2, 4)$

15.