数学演習（微分法）Ｈ２１．２．１６　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

１．極限値 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ を求めよ。

２．$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=-1$ が成り立つように，定数 a , b の値を求めよ。

３．点 $(0\,,\,-1)$ から $y=x^3+3x^2$ へ引いた接線の方程式を求めよ。

４．次の関数の極値を求めてグラフを書け。

(1) $y=x^3-6x^2+9x-2$

(2) $y=x^3-3|x|+1$

５．$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6a$ の極値を求めよ。

６．$f(x)=-2x^3+3x^2+12x$ の $-2\leqq x\leqq1$ における最大値･最小値を求めよ。

７．$x+2y=1$, $x\geqq0$, $y\geqq0$ のとき，x^2y の最大値･最小値とそのときの x , y の値を求めよ。

８．$x\geqq0$ のとき，$x^3\geqq3x-2$ を証明せよ。

９．$x^3+x^2-x-a=0$ が異なる３つの実数解を持つように，a の値の範囲を求めよ。

1 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1}\sqrt{x-1}=\sqrt{1-1}=0$$

2 $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=-1$ が成り立つように定数 a,b の値を求めよ。

$x\to2$ のとき 分母 $\to0$ より, 分子 $\to0$ でなければならない。
よって $x=2$ を分子に代入して $2^2+2a+b=0$ ∴ $b=-2a-4$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+a+2}{x+1}=\frac{2+a+2}{2+1}=\frac{a+4}{3}=-1.$$

∴ $a=-7$, $b=-2a-4=-2\cdot(-7)-4=10$

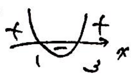
3 点 $(0,-1)$ から $y=x^3+3x^2$ へ引いた接線の方程式を求めよ。

$y'=3x^2+6x$ より, 接点を $(t,\ t^3+3t^2)$ とおくと 接線の方程式は
$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$.
これが点 $(0,-1)$ を通るので, $x=0,\ y=-1$ を代入して
$-1-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(0-t)$
整理して $2t^3+3t^2-1=0$　$t=-1$ を代入すると (左辺) $=0$
∴ $2t^3+3t^2-1=(t+1)(2t^2+t-1)=(t+1)^2(2t-1)=0$.　$t=-1,\ \frac{1}{2}$
$t=-1$ … $y=-3x-1$
$t=\frac{1}{2}$ … $y=\frac{15}{4}x-1$

4 次の関数の極値を求めてグラフを描け。

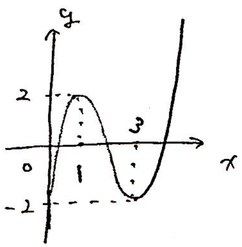
(1) $y=x^3-6x^2+9x-2$

$y'=3x^2-12x+9$
$=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$　y'のグラフ



増減表

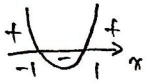
x	…	1	…	3	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	2	↘	−2	↗



極大値 2 $(x=1)$
極小値 −2 $(x=3)$

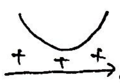
(2) $y=x^3-3|x|+1$

$x\geqq0$ のとき $y=x^3-3x+1$, $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
y'のグラフ　増減表 $(x\geqq0)$

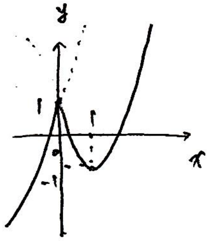


x	0	…	1	…
y'		−	0	+
y	1	↘	−1	↗

$x<0$ のとき $y=x^3+3x+1$　$y'=3x^2+3$
y'のグラフ　増減表



x	…	0
y'	+	
y	↗	1

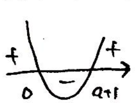


グラフより 極大値 1 $(x=0)$ 極小値 −1 $(x=1)$

5 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の極値を求めよ。

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x=6x\{x-(a+1)\}$
$f'(x)=0$ となるのは $x=0,\ a+1$.

$0<a+1$ のとき $(a>-1)$
$f'(x)$のグラフ.　増減表



x	…	0	…	$a+1$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$a+1=0$ のときは $f'(x)=6x^2\geqq0$ より
極値は存在しない
$f(0)=6a$.
$f(a+1)=-a^3-3a^2+3a-1$

$0>a+1$ のとき $(a<-1)$
$f'(x)$のグラフ　増減表

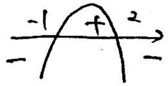
x	…	$a+1$	…	0	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

より

	極大	極小
$a>-1$	$6a$ $(x=0)$	$-a^3-3a^2+3a-1$ $(x=a+1)$
$a<-1$	$-a^3-3a^2+3a-1$ $(x=a+1)$	$6a$ $(x=0)$

6 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x$ の $-2\leqq x\leqq1$ における最大値,最小値を求めよ。

$f'(x)=-6x^2+6x+12$　$f'(x)$のグラフ
$=-6(x^2-x-2)$
$=-6(x-2)(x+1)$



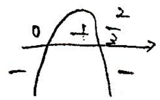
増減表 $(-2\leqq x\leqq1)$

x	−2	…	−1	…	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	4	↘	−7	↗	13

最大値 13 $(x=1)$
最小値 −7 $(x=-1)$

7 $x+2y=1,\ x\geqq0,\ y\geqq0$ の時 x^2y の最大値,最小値を求めその時の x,y を求めよ。

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ で $y\geqq0$ より $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\geqq0$ ∴ $x\leqq1$.
よって $0\leqq x\leqq1$.
このとき,
$x^2y=x^2\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2$ で, これを $f(x)$ とおくと,
$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+x=-\frac{3}{2}x\left(x-\frac{2}{3}\right)$　$f'(x)$のグラフ



増減表 $(0\leqq x\leqq1)$

x	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{27}$	↘	0

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ より
$x=0$ のとき $y=\frac{1}{2}$
$x=\frac{2}{3}$ のとき $y=\frac{1}{6}$
$x=1$ のとき $y=0$

最大値 $\frac{2}{27}$ $\left(x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{6}\right)$
最小値 0 $\left(x=0, y=\frac{1}{2}\right.$ と $\left.x=1, y=0\right)$

8 $x\geqq0$ のとき $x^3\geqq3x-2$ を証明せよ。

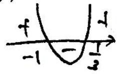
$f(x)=$(左辺)$-$(右辺)$=x^3-3x+2$ とおく
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)$のグラフ　増減表 $(x\geqq0)$

x	0	…	1	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	2	↘	0	↗

よって $x\geqq0$ における
$f(x)$ の最小値は 0 $(x=1)$
ゆえに,
$x\geqq0$ において $f(x)\geqq0$
∴ $x^3\geqq3x-2$

9 $x^3+x^2-x-a=0$ が異なる3つの実数解を持つように a の値の範囲を求めよ。

解法1 $f(x)=x^3+x^2-x-a$ とおく.　$f'(x)$のグラフ
$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$



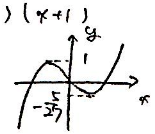
増減表

x	…	−1	…	$\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$1-a$	↘	$-\frac{5}{27}-a$	↗

異なる3つの実数解
⇕
極大値×極小値 <0
なので
$(1-a)\times\left(-\frac{5}{27}-a\right)<0$
⇔ $(a-1)\left(a+\frac{5}{27}\right)<0$ ∴ $-\frac{5}{27}<a<1$

解法2 $a=x^3+x^2-x$ と変形し, $f(x)=x^3+x^2-x$ とおく.
$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$
増減表

x	…	−1	…	$\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗



直線 $y=a$ が
異なる3点で交わるのは
$-\frac{5}{27}<a<1$