数学演習（微分法）Ｈ２１．１０．７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

１．導関数の定義にしたがって，関数 $y=x^2-3x+9$ の導関数を求めよ。

２．　等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

３．(1)　次の極限値を求めよ。　$\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-12}$

(2)　極限値 $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ で表せ。

４．関数 $f(x)=x^2+x-2$ について，$y=f(x)$ のグラフ上で x 座標が -1 である点を A とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における接線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2)　点 A を通り，接線 ℓ_1 に垂直な直線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

５．曲線 $y=x(x-2)^2$ に，点 $(0,\ -18)$ から引いた接線 ℓ の方程式を求めよ。

６．　関数 $f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

7. $f(x)=ax^2(x-3)+b\ (a \fallingdotseq 0)$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 5，最小値が -7 であるように，定数 a，b の値を定めよ。

8. 曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるような定数 k の値を求めよ。

9. 関数 $f(x)=x^3+3ax^2$ の $-3 \leqq x \leqq 0$ における最大値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

10. 曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A $(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

数学演習（微分法）Ｈ２１．１０．７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

１．導関数の定義にしたがって，関数 $y=x^2-3x+9$ の導関数を求めよ。

解答　$y'=2x-3$

$y=f(x)$ とする。

$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-3(x+h)+9-(x^2-3x+9)$

$=2xh+h^2-3h=h(2x+h-3)$

よって　$y'=f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}(2x+h-3)=2x-3$

２．等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=-2x^2+2x-5$

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

与えられた等式に代入すると

$2(ax^2+bx+c)+x(2ax+b)=-8x^2+6x-10$

整理して　$4ax^2+3bx+2c=-8x^2+6x-10$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$4a=-8,\ 3b=6,\ 2c=-10$

よって　$a=-2,\ b=2,\ c=-5$

したがって　$f(x)=-2x^2+2x-5$

３．(1)　次の極限値を求めよ。　$\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-12}$

(2)　極限値 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ で表せ。

解答　(1)　$\dfrac{5}{7}$　　(2)　$3f'(a)$

(1)　$\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-12}=\lim_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-4)}=\lim_{x\to-3}\dfrac{x-2}{x-4}=\dfrac{-3-2}{-3-4}=\dfrac{5}{7}$

(2)　$h\to0$ のとき，$3h\to0$ であるから

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}3\cdot\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}$

$=3\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=3f'(a)$

４．関数 $f(x)=x^2+x-2$ について，$y=f(x)$ のグラフ上で x 座標が -1 である点をＡとする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点Ａにおける接線 ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2)　点Ａを通り，接線 ℓ_1 に垂直な直線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

解答　(1)　$y=-x-3$　　(2)　$y=x-1$

(1)　$f(-1)=(-1)^2+(-1)-2=-2$

また　$f'(x)=2x+1$

よって　$f'(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$

ゆえに，接線 ℓ_1 の方程式は

$y-(-2)=-\{x-(-1)\}$

すなわち　$y=-x-3$

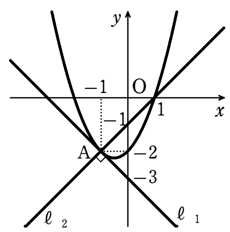
(2)　直線 ℓ_2 の傾きを m とすると，

$\ell_1\perp\ell_2$ から　$m\cdot(-1)=-1$

よって　$m=1$

ゆえに，直線 ℓ_2 の方程式は

$y-(-2)=1\cdot\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=x-1$



５．曲線 $y=x(x-2)^2$ に，点 $(0,\ -18)$ から引いた接線 ℓ の方程式を求めよ。

解答　$y=7x-18$

$f(x)=x(x-2)^2$ とおくと　$f(x)=x^3-4x^2+4x$

よって　$f'(x)=3x^2-8x+4$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(a^3-4a^2+4a)=(3a^2-8a+4)(x-a)$

この直線が点 $(0,\ -18)$ を通るとすると

$-18-(a^3-4a^2+4a)=(3a^2-8a+4)(0-a)$

整理して　$a^3-2a^2-9=0$　……①

$P(a)=a^3-2a^2-9$ とおくと

$P(3)=3^3-2\cdot3^2-9=0$

ゆえに，$P(a)$ は $a-3$ で割り切れ，方程式①は

$(a-3)(a^2+a+3)=0$

$a^2+a+3=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$ であるから　$a=3$

したがって，接線 ℓ の方程式は

$y-(3^3-4\cdot3^2+4\cdot3)=(3\cdot3^2-8\cdot3+4)(x-3)$

すなわち　$y=7x-18$

６．関数 $f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a<3,\ 6<a$

$f'(x)=3x^2+2ax+3a-6$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，$f'(x)=0$ すなわち

$3x^2+2ax+3a-6=0$ ……① が異なる2つの実数解をもつことである。

よって，①の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-3(3a-6)>0$　　整理して　$(a-3)(a-6)>0$

これを解いて　$a<3,\ 6<a$

7．$f(x)=ax^2(x-3)+b$ $(a \neq 0)$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 5，最小値が -7 であるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (-3,\ -7)$

$f(x)=ax^2(x-3)+b=ax^3-3ax^2+b$ であるから

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると，$a \neq 0$ から　$x=0,\ 2$

また　$f(-1)=-4a+b$，$f(0)=b$，$f(1)=-2a+b$

[1]　$a>0$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	……	0	……	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-4a+b$	↗	極大 b	↘	$-2a+b$

$a>0$ であるから　$-4a+b<-2a+b$

よって，最小値は　$f(-1)=-4a+b$

また，最大値は　$f(0)=b$

ゆえに　$b=5$ ……①，　$-4a+b=-7$ ……②

① を ② に代入して　$-4a+5=-7$

したがって　$a=3$　　これは $a>0$ を満たす。

[2]　$a<0$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	……	0	……	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-4a+b$	↘	極小 b	↗	$-2a+b$

$a<0$ であるから　$-4a+b>-2a+b$

よって，最大値は　$f(-1)=-4a+b$

また，最小値は　$f(0)=b$

ゆえに　$-4a+b=5$ ……③，　$b=-7$ ……④

④ を ③ に代入して　$-4a-7=5$

したがって　$a=-3$　　これは $a<0$ を満たす。

以上から　$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (-3,\ -7)$

8．曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるような定数 k の値を求めよ。

解答　$k=-1,\ 3$

$x^3-2x+1=x+k$ とすると　$x^3-3x+1=k$

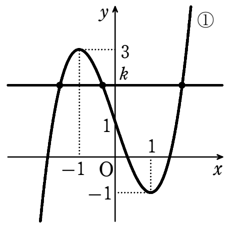
曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるための条件は，曲線 $y=x^3-3x+1$ ……① と直線 $y=k$ が異なる 2 点を共有することである。

① から　$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm 1$

$y=x^3-3x+1$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



よって，曲線 ① の概形は図のようになる。

曲線 ① と直線 $y=k$ が異なる 2 つの共有点をもつような k の値は，図から　$k=-1,\ 3$

9．関数 $f(x)=x^3+3ax^2$ の $-3 \leqq x \leqq 0$ における最大値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

解答　$0<a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき $x=-2a$ で最大値 $4a^3$，

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき $x=-3$ で最大値 $27(a-1)$

$f'(x)=3x^2+6ax=3x(x+2a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ -2a$

$a>0$ であるから　$-2a<0$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	$-2a$	……	0	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $4a^3$	↘	極小 0	↗

[1]　$-3 \leqq -2a<0$　すなわち　$0<a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

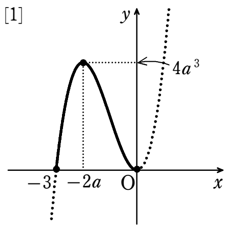
$y=f(x)$ のグラフは右図 [1] のようになる。

よって，$-3 \leqq x \leqq 0$ において，$f(x)$ は $x=-2a$ で

最大値 $f(-2a)=4a^3$

をとる。

[1]



[2]　$-2a<-3$　すなわち　$\dfrac{3}{2}<a$ のとき

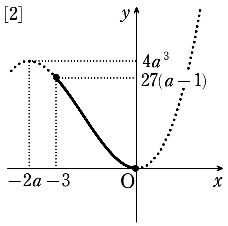
$y=f(x)$ のグラフは右図 [2] のようになる。

よって，$-3 \leqq x \leqq 0$ において，$f(x)$ は $x=-3$ で

最大値 $f(-3)=-27+27a=27(a-1)$

をとる。

[2]



[1]，[2] から

$0<a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき $x=-2a$ で最大値 $4a^3$，

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき $x=-3$ で最大値 $27(a-1)$

をとる。

10．曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A $(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-7<a<20$

$y=x^3-9x^2+15x-7$ から　$y'=3x^2-18x+15$

曲線上の点 $(t,\ t^3-9t^2+15t-7)$ における接線の方程式は

$y-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(x-t)$

この直線が点 A $(0,\ a)$ を通るとき

$a-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(-t)$

よって　$-2t^3+9t^2-7=a$ ……①

また，3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線も異なる。

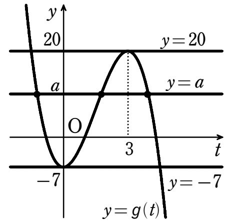
ゆえに，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつとき，点 A から曲線に 3 本の接線が引ける。

ここで，$g(t)=-2t^3+9t^2-7$ とすると

$g'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	……	0	……	3	……
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	極小 -7	↗	極大 20	↘



よって，$y=g(t)$ のグラフは右の図のようになる。

① の異なる実数解の個数，すなわち $y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数が 3 となるような a の値の範囲は　$-7<a<20$