数学演習（微分法）Ｈ２６．９．２２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．関数 $y=x^2+4x$ を定義に従って微分せよ。

2．円の半径 r が変化するとき，その面積 S の $r=10$ における微分係数を求めよ。

3．等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

4．曲線 $y=-x^3+x+2$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線に垂直な直線の方程式を求めよ。

5．点 $(2,\ -2)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

6．a を定数とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$ が極値をもつとき

(1)　a が満たすべき条件を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値が32となるとき，a の値を求めよ。

7．3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=0$ で極大値2をとり，$x=2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

8．半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ。また，そのときの円柱の高さを求めよ。

9．曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 3 点を共有するような定数 k の値の範囲を求めよ。

10．$-2\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して，不等式 $4x^3+3x^2-6x-a+3>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

11．曲線 C：$y=x^3+3x^2+x$ と点 A$(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

12．関数 $f(x)=8^x-2^{2x+3}+2^{x+4}-1$ に関して，次の問いに答えよ。

(1)　$2^x=t$ として，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2)　$-2\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(x)$ の最大値とそのときのxの値を求めよ。

13．a は定数とする。関数 $f(x)=-x^3+3ax$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

1．関数 $y=x^2+4x$ を<u>定義に従って</u>微分せよ。

解答　$y'=2x+4$

解説

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+4(x+h)\}-(x^2+4x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2+4(x+h)-4x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+4)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h+4)$$
$$=2x+4$$

2．円の半径 r が変化するとき，その面積 S の $r=10$ における微分係数を求めよ。

解答　20π

解説

半径rの円の面積は　$S=\pi r^2$　したがってSをrで微分すると　$\dfrac{dS}{dr}=\pi\cdot 2r=2\pi r$

よって，S の $r=10$ における微分係数は，$\dfrac{dS}{dr}$において$r=10$を代入し　$2\pi\cdot 10=20\pi$

3．等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=-2x^2+2x-5$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると　　$f'(x)=2ax+b$

与えられた等式に代入すると　　$2(ax^2+bx+c)+x(2ax+b)=-8x^2+6x-10$

よって左辺を展開して整理すると　　$4ax^2+3bx+2c=-8x^2+6x-10$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$4a=-8$　（x^2の係数），$3b=6$　（xの係数），$2c=-10$　（定数項）

ゆえに　　$a=-2$，$b=2$，$c=-5$

したがって　　$f(x)=-2x^2+2x-5$

4．曲線 $y=-x^3+x+2$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線に垂直な直線の方程式を求めよ。

解答　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

解説

$f(x)=-x^3+x+2$ とすると　　$f'(x)=-3x^2+1$

よって，点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは　　$f'(1)=-3\cdot 1^2+1=-2$

点 $(1,\ 2)$ における接線に垂直な直線の傾きを m とすると，

傾きどうしをかけて-1になるから

$-2\times m=-1$

よって　　$m=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める直線の方程式は，点$(1,2)$を通り傾きが$\dfrac{1}{2}$であるから

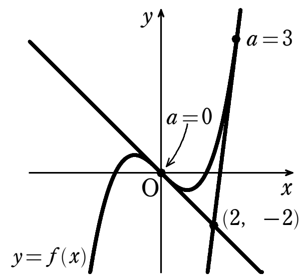
$y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

参考　このように，接点を通り，接線に垂直な直線を<u>法線</u>と言う。

5．点 $(2,\ -2)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答　$y=-x$　接点は$(0,0)$，$y=8x-18$　接点は$(3,6)$

解説



$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$ とすると

$f'(x)=x^2-1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点$\left(a,\ \dfrac{1}{3}a^3-a\right)$ における接線の方程式は

$y-\left(\dfrac{1}{3}a^3-a\right)=(a^2-1)(x-a)$

すなわち展開して　$y=(a^2-1)x-\dfrac{2}{3}a^3$　…… ①

この直線が点 $(2,\ -2)$ を通るから，代入すると

$-2=(a^2-1)\cdot 2-\dfrac{2}{3}a^3$

整理すると　$-2=2a^2-2-\dfrac{2}{3}a^3$　両辺3倍して　$6a^2-2a^3=0$

さらに両辺を-2で割って，因数分解すると　$a^2(a-3)=0$　　ゆえに　　$a=0,\ 3$

求める接線の方程式は，この a の値を ① に代入して

$a=0$ のとき　$y=(0^2-1)x-\dfrac{2}{3}\cdot 0^3$　より　$y=-x$，

また接点は$\left(0,\dfrac{1}{3}\cdot 0^3-0\right)$ より $(0,0)$

$a=3$ のとき　$y=(3^2-1)x-\dfrac{2}{3}\cdot 3^3$　より　$y=8x-18$

また接点は$\left(3,\dfrac{1}{3}\cdot 3^3-3\right)$ より $(3,6)$

6．a を定数とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$ が極値をもつとき

(1)　a が満たすべき条件を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値が 32 となるとき，a の値を求めよ。

解答　(1)　$a\neq 2$　　(2)　$a=-2,\ \dfrac{10}{3}$

解説

(1)　$f'(x)=6x^2-6(a+2)x+12a=6\{x^2-(a+2)x+2a\}=6(x-2)(x-a)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$f'(x)=0$ とすると　　$x=2,\ a$

よって，求める条件は　　$a\neq 2$

別解　$f'(x)=6\{x^2-(a+2)x+2a\}$において，判別式$D>0$となればいい

$D=(a+2)^2-4\cdot 1\cdot 2a=a^2+4a+4-8a=a^2-4a+4=(a-2)^2$

したがって，$(a-2)^2>0$　より　$a\neq 2$　であればいい。

(2)　[1]　$a<2$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$f(x)$ は

$x=a$ で極大値 $f(a)=-a^3+6a^2$ をとる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，求める条件は

$-a^3+6a^2=32$

ゆえに　　$a^3-6a^2+32=0$　　よってこの 3 次方程式を解くと，

左辺に$a=4$を代入すると　$4^3-6\cdot 4^2+32=64-96+32=0$　から

左辺は$a-4$で割り切れる。つまり

$(a-4)(a^2-2a-8)=0$　より　　$(a+2)(a-4)^2=0$

したがって　　$a=-2,\ 4$

このうち$a<2$を満たすものは　　$a=-2$

[2]　$a>2$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$f(x)$は

$x=2$ で極大値 $f(2)=12a-8$ をとる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，求める条件は

$12a-8=32$

よって　　$a=\dfrac{10}{3}$　　　　これは $a>2$ を満たす。

以上から，求める a の値は　　$a=-2,\ \dfrac{10}{3}$

7．3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=0$ で極大値 2 をとり，$x=2$ で極小値 -6 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

解説

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=0$ で極大値 2 をとるから　　$f(0)=2$，$f'(0)=0$

$f(0)=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=d$

$f'(0)=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=c$

より，$d=2$，$c=0$となる。

$x=2$ で極小値 -6 をとるから　　$f(2)=-6$，$f'(2)=0$

$f(2)=a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d=8a+4b+2c+d$

$f'(0)=3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c=12a+4b+c$

よって　　$8a+4b+2c+d=-6$，$12a+4b+c=0$

これらを解いて　　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

逆に，このとき

$f(x)=2x^3-6x^2+2$　…… ①

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

関数 ① の増減表は右のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -6	↗

したがって　　$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$

別解

$f'(x)$のx^2の係数は$3a$であり，方程式$f'(x)=0$は$x=0$と$x=2$を解にもつので，

$f'(x)=3a(x-0)(x-2)$　つまり　$f'(x)=3ax^2-6ax$　となる。

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　と係数を比較して

$-2b=-6a$　，$c=0$　　つまり　$b=3a$，$c=0$

これと，$f(0)=2$，$f(2)=-6$　つまり　$d=2$，$8a+4b+2c+d=-6$

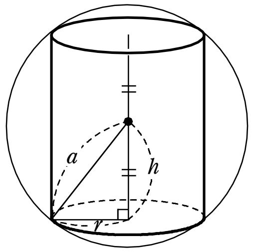
から$a=2$，$b=-6$，$c=0$，$d=2$　となる。（以下同じ）

8．半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ。また，そのときの円柱の高さを求めよ。

解答　体積の最大値 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$，そのときの円柱の高さ $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

解説

円柱の高さを $2h$ $(0<2h<2a)$ とし，底面の半径を r とする。（円柱の高さをhとしてもいいが,この方があとで計算は楽になる。一つのテクニックである）



すると， 図の直角三角形において

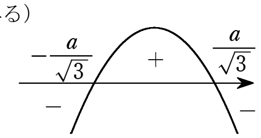
三平方の定理より　$r^2=a^2-h^2$

また, $0<2h<2a$ から , すべて2で割って　$0<h<a$

円柱の体積を V とすると

$V=$(底面積)×(高さ)$=\pi r^2\cdot 2h=2\pi(a^2-h^2)h$

$=-2\pi(h^3-a^2h)$　　(←Vをhの３次関数とみる)



V を h で微分すると

$V'=-2\pi(3h^2-a^2)$

$=-2\pi(\sqrt{3}h+a)(\sqrt{3}h-a)$

$0<h<a$ において，$V'=0$ となるのは，$h=\frac{a}{\sqrt{3}}$ のときである。

ゆえに，$0<h<a$ における V の増減表は，右のようになる。

h	0	…	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	…	a
V'		+	0	−	
V		↗	極大	↘	

したがって，V は $h=\frac{a}{\sqrt{3}}$ のとき最大となる。

$h=\frac{a}{\sqrt{3}}$ のとき，円柱の高さは $2h$ より　$2\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

体積は $2\pi(a^2-h^2)h$ より　$2\pi\left(a^2-\frac{a^2}{3}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$

よって　体積の最大値 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$，そのときの円柱の高さ $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

9．曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる３点を共有するような定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　$-1<k<3$

解説

曲線と直線の交点のx座標を求めるため , 連立すると　$x^3-2x+1=x+k$

よって　$x^3-3x+1=k$　となる。つまり

曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる３点を共有するための条件は,

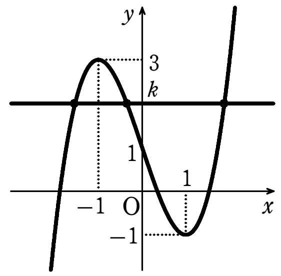
方程式$x^3-3x+1=k$が異なる３個の解をもつ , すなわち , 曲線$y=x^3-3x+1$ ……① と直線 $y=k$ が異なる３点を共有することである。

① から　$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm1$

$y=x^3-3x+1$ の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



よって，曲線 ① の概形は図のようになる。

曲線 ① と直線 $y=k$ が異なる３つの共有点をもつような k の値の範囲は，図から　$-1<k<3$

10. $-2\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して，不等式 $4x^3+3x^2-6x-a+3>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a<-5$

解説

$f(x)=4x^3+3x^2-6x-a+3$ とすると　$f'(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ \frac{1}{2}$

$-2\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	-2	…	-1	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

また　$f(-2)=-a-5$，$f(-1)=-a+8$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-a+\frac{5}{4}$，$f(1)=-a+4$

増減表より , 最小になる可能性のある場所は$f(-2)$と$f\left(\frac{1}{2}\right)$である。

差をとると

$f(-2)-f\left(\frac{1}{2}\right)=(-a-5)-\left(-a+\frac{5}{4}\right)=-5-\frac{5}{4}<0$

つまり　$f(-2)-f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　より　$f(-2)$　の方が$f\left(\frac{1}{2}\right)$よりも小さい値である。

ゆえに，$-2\leqq x\leqq 1$ の範囲における $f(x)$ の最小値は　$f(-2)=-a-5$

よって，$-2\leqq x\leqq 1$ のすべての x に対して，$f(x)>0$ が成り立つための条件は

$-2\leqq x\leqq 1$における$f(x)$の最小値が正になればよく　$-a-5>0$

これを解いて　$a<-5$

別解

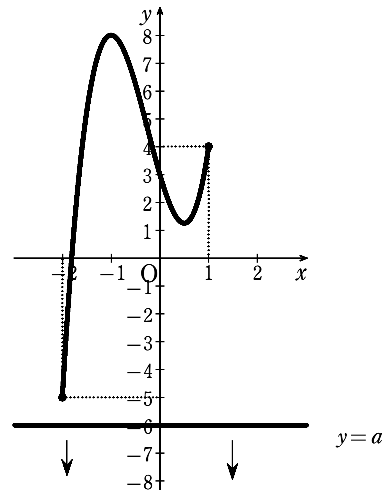
$-2\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して，不等式 $4x^3+3x^2-6x-a+3>0$ が成り立つためには,

$4x^3+3x^2-6x+3>a$　　(←大きい方が上,小さい方が下)

と変形したとき , $-2\leqq x\leqq 1$における$y=4x^3+3x^2-6x+3$のグラフよりも , 直線$y=a$のグラフが常に下側となるaの値の範囲を求める。

（$y=4x^3+3x^2-6x+3$のグラフの書き方は,もう知っているはずなので,ここでは省略する）

ゆえにグラフより



直線$y=a$が点$(-2，-5)$よりも下側を通ればいい。ゆえに$a<-5$

11. 曲線 C : $y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。A を通って C に３本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$-3<a<5$

解説

$y'=3x^2+6x+1$ であるから，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線の方程式は

$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t)$

すなわち　$y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2$

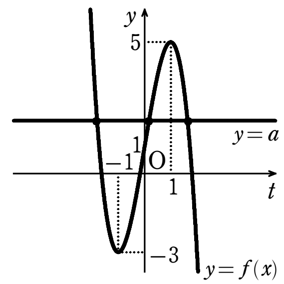
この接線が点 $(1,\ a)$ を通るとすると , 代入して整理して　$-2t^3+6t+1=a$　……①

$f(t)=-2t^3+6t+1$ とすると

$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	−	0	+	0	−
$f(t)$	↘	極小 -3	↗	極大 5	↘



３次関数のグラフでは，接点が異なると接線が異なるから，t の３次方程式 ① が異なる３つの実数解をもつとき，点 A から曲線 C に３本の接線が引ける。

したがって，曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ が異なる３点で交わる条件を求めて

$-3<a<5$

12. 関数 $f(x)=8^x-2^{2x+3}+2^{x+4}-1$ に関して，次の問いに答えよ。

(1)　$2^x=t$ として，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2)　$-2\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(x)$ の最大値とそのときのxの値を求めよ。

解答　(1)　$f(x)=t^3-8t^2+16t-1$　　(2)　$x=2-\log_2 3$ のとき最大値 $\dfrac{229}{27}$

解説

(1)　$f(x)=8^x-2^{2x+3}+2^{x+4}-1=2^{3x}-2^3\cdot 2^{2x}+2^4\cdot 2^x-1$

$=(2^x)^3-8(2^x)^2+16(2^x)-1=t^3-8t^2+16t-1$

(2)　$-2\leqq x\leqq 2$ から,底２は１より大きいので r

$2^{-2}\leqq t\leqq 2^2$　　よって$2^x=t$　とおいたので　$\dfrac{1}{4}\leqq t\leqq 4$ …… ①

$g(t)=t^3-8t^2+16t-1$ とおくと

$g'(t)=3t^2-16t+16=(3t-4)(t-4)$

$g'(t)=0$ とすると　$t=\dfrac{4}{3}$，4

t	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0
$g(t)$		↗	極大	↘	

① の範囲において，$g(t)$ の増減表は右のようになる。

よって，$t=\dfrac{4}{3}$ のとき $g(t)$ は極大かつ最大となり

$$g\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3-8\left(\frac{4}{3}\right)^2+16\cdot\frac{4}{3}-1=\frac{229}{27}$$

したがって，$f(x)$ は $2^x=\dfrac{4}{3}$ のとき，すなわち　$x=\log_2\dfrac{4}{3}$

よって　$x=\log_2 4-\log_2 3$　つまり $x=2-\log_2 3$ のとき最大値 $\dfrac{229}{27}$ をとる。

13. a は定数とする。関数 $f(x)=-x^3+3ax$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

解答　$a\leqq 0$ のとき　　$x=0$ で最大値 0,

$0<a<1$ のとき　$x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$，

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 $3a-1$

解説

$f'(x)=-3x^2+3a=-3(x^2-a)$

●　$a\leqq 0$ ならば $-a\geqq 0$となるので

$x^2+(-a)=$(0以上)$+$(0以上)　より

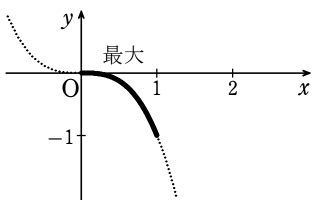
常に　$x^2-a\geqq 0$　となる。

ゆえに$f'(x)=-3\times$(0以上)より

常に$f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に減少する。

よって，$0\leqq x\leqq 1$において

$f(x)$は下がりはじめの $x=0$ で最大となる。



●　$a>0$ ならば　　$f'(x)=-3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{a}$

<u>よって,極大が定義域に入るかどうかで場合分け。</u>

[1]　$0<\sqrt{a}<1$　すなわち　$\sqrt{0}<\sqrt{a}<\sqrt{1}$

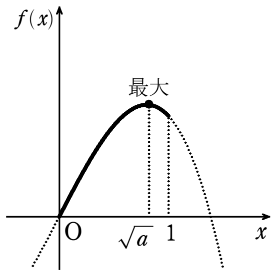
つめり　$0<a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{a}$ で極大かつ最大となる。

[1]

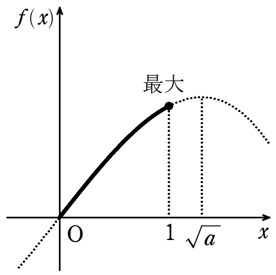


[2]　$1\leqq\sqrt{a}$　すなわち　$1\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は常に増加。

よって，$f(x)$ は $x=1$ で最大となる。

[2]



以上から

$a\leqq 0$ のとき　　$x=0$ で最大値 0,

$0<a<1$ のとき　$x=\sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$，

$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 $3a-1$