

[5] 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が、 $x = 1$ で極大値 5、 $x = 3$ で極小値 1 をとるように、定数 a, b, c, d の値を求めよ。

[7] 点 $A(0, a)$ から曲線 $y = x^3 + 3x^2$ に引くことができる接線の本数を調べよ。

[8] $a > 0$ とする。関数 $y = x^3 - 3a^2x$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値、最小値を求めよ。

[6] $x \geq 0$ のとき、不等式 $x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つときの x の値を求めよ。

1 定義にしたがって、次のものを求めよ。

(1) 関数 $f(x) = x^3 + 3x$ の、 $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率 (ただし、 $a < b$)

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(b^3 + 3b) - (a^3 + 3a)}{b - a} \\ &= \frac{(b^3 - a^3) + 3(b - a)}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b^2 + ba + a^2) + 3(b - a)}{b - a} \\ &= b^2 + ba + a^2 + 3 \end{aligned}$$

(2) 関数 $f(x) = -x^2 + x$ の $x=3$ における微分係数

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + (3+h) - (-3^2 + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(9 + 6h + h^2) + 3 + h - (-9 + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 3 + h + 9 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h - h^2 + h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-6 - h + 1) \\ &= -5 \end{aligned}$$

(3) 関数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ の導関数

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - \frac{1}{2}(x+h)^2 - (x^3 - \frac{1}{2}x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \frac{1}{2}(x^2 + 2xh + h^2) - x^3 + \frac{1}{2}x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - xh - \frac{1}{2}h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - x - \frac{1}{2}h) \\ &= 3x^2 - x \end{aligned}$$

2 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ について、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ 上の点 $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 6x \\ \therefore f'(-1) &= -3(-1)^2 + 6(-1) \\ &= -3 - 6 \\ &= -9 \\ y - f(-1) &= -9(x + 1) \\ y - (-5) &= -9x - 9 \\ \therefore y &= -9x - 4 \end{aligned}$$

また、点 $(-1, f(-1))$ にあたる
接線の方程式は

$$y - f(-1) = -9(x + 1)$$

(2) $y = f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

$$\begin{aligned} y &= -x^3 + 3x^2 + 1 \\ y' &= -3x^2 + 6x \\ &= -3x(x - 2) \end{aligned}$$

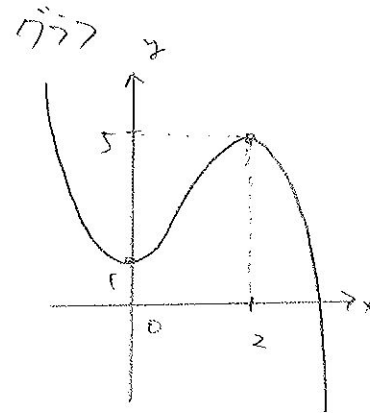


増減表

x	...	0	...	2	...
y'	-	0	+	0	-
f	↓	1	↑	5	↓

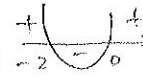
極大値 5 (x=2)

極小値 1 (x=0)



3 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ ($-3 \leq x \leq 2$) の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x \\ &= 3x(x + 2) \end{aligned}$$



x	-3	...	-2	...	0	...	2
f'	+	+	0	-	0	+	+
f	0	↑	4	↓	0	↑	20

$$\begin{aligned} \text{最大値} & 20 (x=2) \\ \text{最小値} & 0 (x=-3, 0) \end{aligned}$$

4 放物線 $y = x^3 + 2$ に点 $C(1, 2)$ から引いた接線の方程式をすべて求めよ。

$$\begin{aligned} \text{接点を } (t, t^3 + 2) \text{ とおく。} \\ y' &= 3x^2 + 0 \end{aligned}$$

この点に於ける接線の
方程式は

$$\begin{aligned} y - (t^3 + 2) &= 3t^2(x - t) \dots (*) \\ y - 2 &= 0(x - 1) \\ \therefore y &= 2 \end{aligned}$$

とあたる。= 4. 点 (1, 2)

を過る点

• $t = \frac{3}{2}$ を (*) に代入

$$2 - (t^3 + 2) = 3t^2(1 - t)$$

$$2 - t^3 - 2 = 3t^2 - 3t^3$$

$$-t^3 = 3t^2 - 3t^3$$

$$2t^3 - 3t^2 = 0$$

$$t^2(2t - 3) = 0$$

$$\begin{aligned} y - \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^3 + 2 \right\} \\ = 3 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(x - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{27}{4}x - \frac{19}{4}$$

