第１回定期数学微分試験　Ｈ２１．５．２１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

１．$f(x)=x^2-3x$ を定義に従って微分せよ。

２．$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ の値を求めよ。

３．$f(x)=x^3$ の $x=1$ から $x=a$ までの平均変化率が３となるように a の値を求めよ。

４．$y=x^3+3x^2$ のとき，次の接線の方程式を求めよ。

⑴ 点 $(-1,2)$ における接線

⑵ 傾きが９となるような接線

５．関数 $f(x)=-2x^3+9x^2-1$ の極値を求め，グラフを書け。

６．$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$ のグラフを書き，$-1\leqq x\leqq 3$ における最大値･最小値とそのときの x の値を求めよ。

７．$x>0$ のとき，$x^3-x^2-x+a\geqq 0$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

８．方程式 $x^3-3x^2-9x+9-a=0$ が異なる３個の解をもつように，a の値の範囲を求めよ。

９．$f(x)=2x^3+9ax^2+12a^2x$ が極値を持つような a の値の範囲を求めよ。また，$x=2$ において極大値となるように a の値を定めよ。

第1回定期数学微分試験　H21.5.21

Class (　　) No. (　　) Name (こたえ)

1 $f(x)=x^2-3x$を定義にしたがって微分せよ。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2+3(x+h)-(x^2-3x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h-3)=2x-3$$

8

2 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$の値を求めよ。

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}(x+1)=3+1=4$$

6

3 $f(x)=x^3$の$x=1$から$x=a$までの平均変化率が３となるようにaの値を求めよ。

$x=1$から$x=a$までの平均変化率

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a^3-1^3}{a-1}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a-1}$$

$$=a^2+a+1$$

∴ $a^2+a+1=3$

$a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

∴ $a=-2,\ 1$

6

4 $y=x^3+3x^2$の時、次の接線の方程式を求めよ。

(1)点$(-1,2)$における接線。

$y'=3x^2+6x$

$x=-1$における接線の傾きは

$y'=3(-1)^2+6(-1)$

$=3-6$

$=-3$

∴ $y-2=-3(x+1)$

よって $y=-3x-1$

8

(2)傾きが9となるような接線。

接点のx座標をaとすると

この点における接線の傾きは

$3a^2+6a$

∴ $3a^2+6a=9$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$ より

$a=-3,\ 1$

・$a=-3$の時。接点の座標は$(-3,0)$

∴ $y=9x+27$

・$a=1$の時。接点の座標は$(1,4)$

∴ $y=9x-5$

12 (各6)

5 $f(x)=-2x^3+9x^2-1$の極値を求めグラフを書け。

$f'(x)=-6x^2+18x$

$=-6x(x-3)$

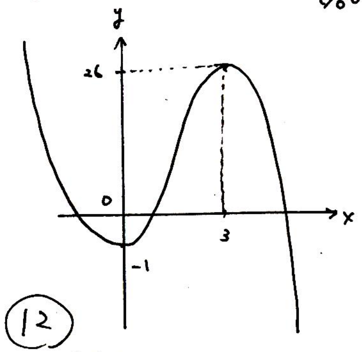
x	…	0	…	3	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−1	↗	26	↘

極大値 26 $(x=3)$

極小値 −1 $(x=0)$

12 (各6)

グラフは下図.



6 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$のグラフを書き、$-1\leqq x\leqq3$における最大値、最小値を求めよ。またその時の$x$の値も求めよ。

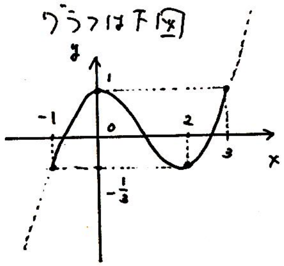
$f'(x)=x^2-2x$

$=x(x-2)$

増減表

x	−1	…	0	…	2	…	3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	↗	1	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1

グラフは下図



最大値 1 $(x=0,\ 3)$

最小値 $-\frac{1}{3}$ $(x=-1,\ 2)$

12 (各6)

7 $x>0$のとき$x^3-x^2-x+a\geqq0$が成りたつようなaの値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^3-x^2-x+a$ とおくとき.

$x>0$において $f(x)\geqq0$ が成り立つとは

($x>0$における$f(x)$の最小値)$\geqq0$

であればよい。

[$y=f(x)$のグラフが $x>0$において x軸より上にあることと同じ]

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

増減表($x>0$)

x	0	…	1	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘		↗

ここで $f(1)=1-1-1+a=a-1$

よって $x>0$における$f(x)$の最小値は $a-1$ より

$a-1\geqq0$

∴ $a\geqq1$

10

8 $x^3-3x^2-9x+9-a=0$が異なる３個の実数解をもつようにaの値の範囲を求めよ。

$a=x^3-3x^2-9x+9$

として、$y=x^3-3x^2-9x+9$と

$y=a$の交点について考える.

$y'=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)$

$=3(x-3)(x+1)$

増減表は

x	…	−1	…	3	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	14	↘	−18	↗

10

グラフより

$-18<a<14$

9 $f(x)=2x^3+9ax^2+12a^2x$　が極値をもつようなaの値範囲を求めよ。また$x=2$において極大値となるようにaの値を求めよ。

$f'(x)=6x^2+18ax+12a^2=6(x^2+3ax+2a^2)$

この２次関数において

$D>0$ となればよい.

∴ $D=(3a)^2-4\cdot1\cdot2a^2$

$=9a^2-8a^2$

$=a^2>0$

∴これを満たすaは

$a\neq0$

16 (各8)

また. $f'(x)=6(x^2+3ax+2a^2)$

$=6(x+a)(x+2a)$

より. $a>0$の時.

$x=-2a$にて極大

∴ $-2a=2$ より $a=-1$

これは $a>0$を満たさない

また $a<0$の時

$x=-a$にて極大

∴ $-a=2$ ∴ $a=-2$

これは $a<0$を満たすので. $a=-2$