第３回定期考査（微分法）Ｈ２６．９．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．関数 $f(x)=x^3+x$ の，$x=1$ から $x=2$ までの平均変化率を求めよ。

2．関数 $f(x)=x^2$ について，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を，<u>定義に従って（つまり，極限を用いて）</u>求めよ。

3．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-6$

(2)　$y=-3x^2+5x-2$

(3)　$y=-\frac{5}{2}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{4}x$

(4)　$y=(x^2+1)(x-4)$

4．曲線 $y=-2x^2+1$ 上の点 $(1,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ。

5．曲線 $y=x^2-3x+4$ に，原点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

6．関数 $y=-x^3+6x^2-12x+8$ の増減を調べ，極値があれば，その極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

7．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるように，定数 a，b の値を定めよ。また，極大値を求めよ。

8．関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9. 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。　$-3x^4+4x^3+12x^2-2=0$

10. 次のことが成り立つことを証明せよ。　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+\dfrac{1}{27} \geqq x^2$

11. 曲線 $C: y=x^3+3x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3+3t^2)$ における C の接線が点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るとき，a を t を用いて表せ。

(2)　点 A を通る C の接線が 3 本存在するとき，a の値の範囲を求めよ。

12. 関数 $f(x)=x^3-3ax^2+5a^3$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最小値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

第３回定期考査（微分法）Ｈ２６．９．２９　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．関数 $f(x)=x^3+x$ の，$x=1$ から $x=2$ までの平均変化率を求めよ。

解答　8

解説

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(2^3+2)-(1^3+1)}{2-1}=\frac{10-2}{1}=8$$

２．関数 $f(x)=x^2$ について，$x=a$における微分係数 $f'(a)$ を，<u>定義に従って（つまり，極限を用いて）</u>求めよ。

解答　$f'(a)=2a$

解説

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(2a+h)}{h}=\lim_{h\to0}(2a+h)=2a$$

３．次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-6$　　　(2)　$y=-3x^2+5x-2$

(3)　$y=-\frac{5}{2}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{4}x$　　　(4)　$y=(x^2+1)(x-4)$

解答　(1)　$y'=0$　　(2)　$y'=-6x+5$

(3)　$y'=-\frac{15}{2}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{4}$　　(4)　$y'=3x^2-8x+1$

解説

(1)　$y'=0$

(2)　$y'=-3\cdot2x+5=-6x+5$

(3)　$y'=-\frac{5}{2}\cdot3x^2+\frac{2}{3}\cdot2x+\frac{1}{4}=-\frac{15}{2}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{4}$

(4)　$y=x^3-4x^2+x-4$ であるから

$y'=3x^2-4\cdot2x+1=3x^2-8x+1$

４．曲線$y=-2x^2+1$ 上の点 $(1,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-4x+3$

解説

$f(x)=-2x^2+1$ とすると　$f'(x)=-4x$

よって点$(1,-1)$における接線の傾きは　$f'(1)=-4\cdot1=-4$

したがって，求める接線の方程式は

$y-(-1)=-4(x-1)$

すなわち　$y=-4x+3$

５．曲線 $y=x^2-3x+4$ に，原点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答　$y=x$，接点$(2,\ 2)$；$y=-7x$，接点$(-2,\ 14)$

解説

$y'=2x-3$

接点の座標を $(a,\ a^2-3a+4)$ とすると，接線の傾きは $2a-3$ となるから，その方程式は　$y-(a^2-3a+4)=(2a-3)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-3)x-a^2+4$　……①

この直線が点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0=(2a-3)\cdot0-a^2+4$

よって　$a^2-4=0$　　これを解くと　$a=\pm2$

$a=2$ のとき，接点の座標は　$(2,\ 2)$

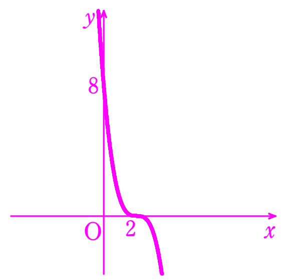
① から，接線の方程式は　$y=x$

$a=-2$ のとき，接点の座標は　$(-2,\ 14)$

① から，接線の方程式は　$y=-7x$

６．関数 $y=-x^3+6x^2-12x+8$ の増減を調べ，極値があれば，その極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解答　極値はない，[図]



解説

$y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

$y'=0$ となるxは$x=2$

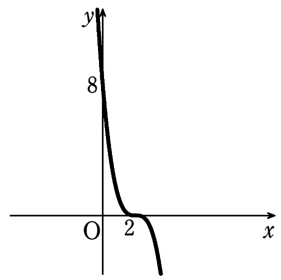
増減表は

x	…	2	…
y'	−	0	−
y	↘	0	↘

常に $y'\leqq0$ であるから，y は常に減少し，極値をもたない。

また，$x=2$ のとき　$y=0$

したがって，グラフは[図]



７．関数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるように，定数 a，b の値を定めよ。また，極大値を求めよ。

解答　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ で極大値 6

解説

$f'(x)=3x^2-6x+a$

$f(x)$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるとき　$f'(3)=0$，$f(3)=-26$

よって　$9+a=0$，$3a+b=-26$

これを解くと　$a=-9$，$b=1$

このとき　$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

したがって，右の増減表が得られ，条件を満たす。

以上から　$a=-9$，$b=1$；$x=-1$ で極大値 6

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 6	↘	極小 -26	↗

８．関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-6\leqq a\leqq6$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+12$

$f(x)$ が常に増加するための条件は，$f'(x)\geqq0$ が常に成り立つことである。

よって，2 次方程式 $f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+12=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot12\leqq0$$

ゆえに　$a^2-36\leqq0$　　　これを解いて　$-6\leqq a\leqq6$

9．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。　$-3x^4+4x^3+12x^2-2=0$

解答　4 個

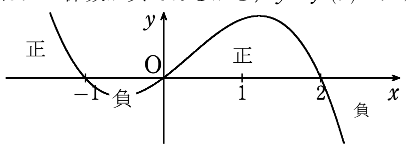
解説

$f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2-2$ とおくと

$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x^2-x-2)=-12x(x+1)(x-2)$

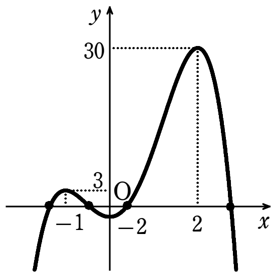
$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ -1,\ 2$

よって，$f'(x)$はx^3の係数が負であるから，$y=f'(x)$のグラフの概形は下図



$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	0	…	2	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 3	↘	極小 -2	↗	極大 30	↘



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，このグラフと x 軸の共有点の個数は　4 個

したがって，方程式の異なる実数解の個数は　4 個

10．次のことが成り立つことを証明せよ。　$x\geqq 0$ のとき　$2x^3+\frac{1}{27}\geqq x^2$

解答　略

解説

$f(x)=\left(2x^3+\frac{1}{27}\right)-x^2$ とすると　$f'(x)=6x^2-2x=2x(3x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ \frac{1}{3}$

$x\geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	↘	0	↗

よって，$x\geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=\frac{1}{3}$ で最小値 0 をとる。

したがって，$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq 0$ であるから

$$\left(2x^3+\frac{1}{27}\right)-x^2\geqq 0 \quad すなわち \quad 2x^3+\frac{1}{27}\geqq x^2$$

等号が成り立つのは，$x=\frac{1}{3}$ のときである。

11．曲線 C：$y=x^3+3x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3+3t^2)$ における C の接線が点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るとき，a を t を用いて表せ。

(2)　点 A を通る C の接線が 3 本存在するとき，a の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$a=-2t^3-3t^2$　　(2)　$-1<a<0$

解説

(1)　$y=x^3+3x^2$ について　$y'=3x^2+6x$

よって，点 P における C の接線の方程式は　$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$

すなわち　$y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2$

これが点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るとき　$a=(3t^2+6t)\cdot 0-2t^3-3t^2$

よって　$2t^3+3t^2+a=0$　ゆえに　$-2t^3-3t^2=a$

(2)　3 次関数のグラフでは，接点が異なれば接線も異なる。

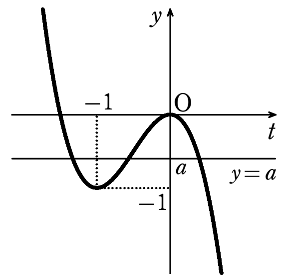
ゆえに，A を通る C の接線の本数は，t の方程式 $a=-2t^3-3t^2$ の異なる実数解の個数に一致する。

$f(t)=-2t^3-3t^2$ とおくと　$f'(t)=-6t^2-6t=-6t(t+1)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=0,\ -1$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	…	-1	…	0	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 -1	↗	極大 0	↘



よって，$y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式 ① の異なる実数解の個数，すなわち接線の本数に一致する。

したがって，接線が 3 本存在するときの a の値の範囲は　$-1<a<0$

12．関数 $f(x)=x^3-3ax^2+5a^3$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最小値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

解答　$0<a\leqq\frac{3}{2}$ のとき $x=2a$ で最小値 a^3，$\frac{3}{2}<a$ のとき $x=3$ で最小値 $5a^3-27a+27$

解説

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2a$

$a>0$ であるから　$2a>0$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	0	……	$2a$	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $5a^3$	↘	極小 a^3	↗

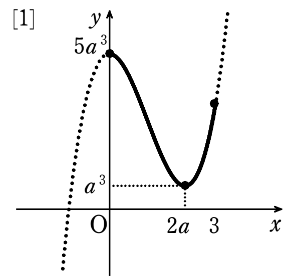
[1]　$0<2a\leqq 3$　すなわち　$0<a\leqq\frac{3}{2}$　のとき

$y=f(x)$ のグラフは右図 [1] のようになる。

よって，$0\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)$ は $x=2a$ で

最小値 $f(2a)=a^3$

をとる。



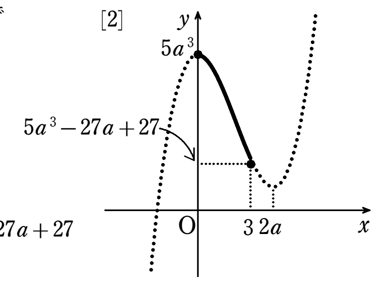
[2]　$3<2a$　すなわち　$\frac{3}{2}<a$　のとき

$y=f(x)$　のグラフは右図 [2] のようになる。

よって，$0\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)$ は $x=3$ で

最小値 $f(3)=5a^3-27a+27$

をとる。



[1]，[2] から

$0<a\leqq\frac{3}{2}$ のとき $x=2a$ で最小値 a^3，

$\frac{3}{2}<a$　　のとき $x=3$ で最小値 $5a^3-27a+27$

をとる。