統一テスト（微分法）Ｈ２０．１１．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$

２．次の関数を**定義に従って**微分せよ。 $f(x)=x^2+4x$

３．次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=1$$

４．放物線 $y=-2x^2+1$ 上の点 A$(1,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ。

５．点 C$(1,\ -1)$ から関数 $y=x^2-x$ のグラフに引いた接線の方程式を求めよ。

６．関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+a$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

７．関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で極大値 34 をとり，$x=5$ で極小値 d をとる。定数 a，b，c，d の値を求めよ。

8．$a>0$ とする。関数 $f(x)=ax(x-3)^2+b$ の区間 $0\leqq x\leqq 5$ における最大値が 15，最小値が -5 であるという。定数 a，b の値を求めよ。

9．3 次方程式 $x^3-3x-2-a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a によってどのように変わるかを調べよ。

10. $x\geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+5>3x^2$ が成り立つことを証明せよ。

11. 曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A $(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

12. a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

統一テスト（微分法）Ｈ２０．１１．１７（解答）　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$

解答　$\dfrac{3}{5}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+3}=\frac{2+1}{2+3}=\frac{3}{5}$$

２．次の関数を**定義に従って**微分せよ。　$f(x)=x^2+4x$

解答　$y'=2x+4$

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2+4(x+h)\}-(x^2+4x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2+4(x+h)-4x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2+4h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h+4)$$

$$=2x+4$$

３．次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=1$$

解答　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=1$ ……① において，$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから

$$\lim_{x\to2}(ax^2+bx)=0$$

ゆえに，$4a+2b=0$ となり　$b=-2a$　……②

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax^2-2ax}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}ax=2a$

よって，① から　$2a=1$　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$

このとき，② から　$b=-1$　　したがって　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$

４．放物線 $y=-2x^2+1$ 上の点 A$(1,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-4x+3$

$f(x)=-2x^2+1$ とすると　$f'(x)=-4x$

よって，$x=1$ における接線の傾きは

$f'(1)=-4\cdot1=-4$

ゆえに，点 A$(1,\ -1)$ における接線の方程式は

$y-(-1)=-4(x-1)$

すなわち　$y=-4x+3$

５．点 C$(1,\ -1)$ から関数 $y=x^2-x$ のグラフに引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x$，$y=3x-4$

$f(x)=x^2-x$ とすると　$f'(x)=2x-1$

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-1)x-a^2$　……①

この直線が点 C$(1,\ -1)$ を通るから

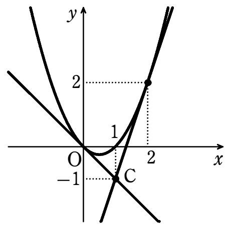
$-1=(2a-1)\cdot1-a^2$

整理して　$a^2-2a=0$

ゆえに　$a(a-2)=0$　　よって　$a=0,\ 2$

したがって，求める接線の方程式は，① から

$a=0$ のとき　$y=-x$，　$a=2$ のとき　$y=3x-4$



６．関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+a$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$a<0$，$3<a$

3 次関数 $f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件は，その導関数 $f'(x)$ の符号が正から負に，負から正に変わる点があることである。

よって，2 次方程式 $f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。

したがって，判別式について　$\dfrac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)>0$

これを解いて　$a<0$，$3<a$

７．関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で極大値 34 をとり，$x=5$ で極小値 d をとる。定数 a，b，c，d の値を求めよ。

解答　$a=-6$，$b=-15$，$c=26$，$d=-74$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$，$x=5$ で極値をとるから　$f'(-1)=0$，$f'(5)=0$

よって　$3-2a+b=0$ ……①，　$75+10a+b=0$ ……②

また，$f(-1)=34$，$f(5)=d$ であるから

$-1+a-b+c=34$ ……③，　$125+25a+5b+c=d$ ……④

①，② から　$a=-6$，$b=-15$

更に，③，④ から　$c=26$，$d=-74$

このとき　$f(x)=x^3-6x^2-15x+26$

$f'(x)=3x^2-12x-15$

$=3(x+1)(x-5)$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	…	-1	…	5	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 34	↘	極小 -74	↗

ゆえに，$f(x)$ は $x=-1$ で極大値 34，$x=5$ で極小値 -74 をとり，条件を満たす。

よって　$a=-6$，$b=-15$，$c=26$，$d=-74$

別解　[a，b の値の求め方]

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$f(x)$ は $x=-1$，$x=5$ で極値をとるから，方程式 $f'(x)=0$ の 2 つの解が -1，5 である。よって，解と係数の関係から

$-1+5=-\dfrac{2}{3}a$，$-1\cdot5=\dfrac{b}{3}$　　ゆえに　$a=-6$，$b=-15$

８．$a>0$ とする。関数 $f(x)=ax(x-3)^2+b$ の区間 $0\leqq x\leqq5$ における最大値が 15，最小値が -5 であるという。定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=-5$

$f(x)=ax(x-3)^2+b=ax^3-6ax^2+9ax+b$

よって　$f'(x)=3ax^2-12ax+9a=3a(x^2-4x+3)$

$=3a(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 3$

また　$f(0)=b$，$f(1)=4a+b$，$f(3)=b$，$f(5)=20a+b$

$a>0$ であるから，$0\leqq x\leqq5$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	1	……	3	……	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↗	極大 $4a+b$	↘	極小 b	↗	$20a+b$

$a>0$ であるから　$4a+b<20a+b$

よって，最大値は　$20a+b$

また，最小値は　$f(0)=f(3)=b$

ゆえに　$20a+b=15$ ……①，　$b=-5$ ……②

② を ① に代入して　$20a=20$　　よって　$a=1$

これは $a>0$ を満たす。

したがって　$a=1$，$b=-5$

9．3 次方程式 $x^3-3x-2-a=0$ の異なる実数解の個数が，定数 a によってどのように変わるかを調べよ。

解答　$a<-4$，$0<a$ のとき 1 個；$a=-4$，0 のとき 2 個；
$-4<a<0$ のとき 3 個

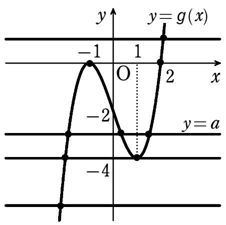
方程式を変形して　　$x^3-3x-2=a$

$g(x)=x^3-3x-2$ とすると

$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 1$

$g(x)$ の増減表は次のようになる。



x	……	-1	……	1	……
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

よって，$y=g(x)$ のグラフは上の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の実数解の個数に一致するから

$a<-4$，$0<a$ のとき　1 個；

$a=-4$，0　　のとき　2 個；

$-4<a<0$　　のとき　3 個

10．$x\geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+5>3x^2$ が成り立つことを証明せよ。

解答　略

$y=(x^3+5)-3x^2$ とすると　　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0$，2

$x\geqq 0$ における y の増減表は，右のようになる。

ゆえに，$x\geqq 0$ において，y は $x=2$ で最小値 1 をとる。

よって，$x\geqq 0$ のとき　　$y>0$

したがって　　$(x^3+5)-3x^2>0$

すなわち　　$x^3+5>3x^2$

x	0	…	2	…
y'		$-$	0	$+$
y	5	↘	極小 1	↗

11．曲線 $y=x^3-9x^2+15x-7$ に対して，y 軸上の点 A $(0,\ a)$ から相異なる 3 本の接線を引くことができるように，実数 a の値の範囲を定めよ。

解答　$-7<a<20$

$y=x^3-9x^2+15x-7$ から　　$y'=3x^2-18x+15$

曲線上の点 $(t,\ t^3-9t^2+15t-7)$ における接線の方程式は

$y-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(x-t)$

この直線が点 A $(0,\ a)$ を通るとき

$a-(t^3-9t^2+15t-7)=(3t^2-18t+15)(-t)$

よって　　$-2t^3+9t^2-7=a$　……①

また，3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線も異なる。

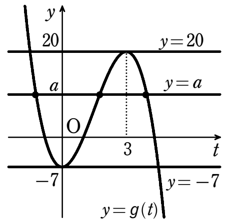
ゆえに，t の 3 次方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもつとき，点 A から曲線に 3 本の接線が引ける。

ここで，$g(t)=-2t^3+9t^2-7$ とすると

$g'(t)=-6t^2+18t=-6t(t-3)$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	……	0	……	3	……
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	極小 -7	↗	極大 20	↘



よって，$y=g(t)$ のグラフは右の図のようになる。

① の異なる実数解の個数，すなわち $y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数が 3 となるような a の値の範囲は　　$-7<a<20$

12．a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

解答　$0<a<\dfrac{3}{4}$，$3<a$ のとき　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

$=(3x-a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{a}{3}$，a

$a>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	…	$\dfrac{a}{3}$	…	a	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{4}{27}a^3$	↘	極小 0	↗

ここで，$x=\dfrac{a}{3}$ 以外に $f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ を満たす

x の値を求めると，$f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ から　　$x^3-2ax^2+a^2x-\dfrac{4}{27}a^3=0$

ゆえに　　$\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)=0$　　　$x\neq\dfrac{a}{3}$ であるから　　$x=\dfrac{4}{3}a$

したがって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ は

[1]　$1<\dfrac{a}{3}$　すなわち　$a>3$ のとき

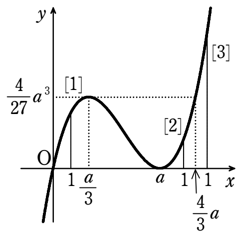
$M(a)=f(1)$

[2]　$\dfrac{a}{3}\leqq 1\leqq\dfrac{4}{3}a$　すなわち　$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき

$M(a)=f\left(\dfrac{a}{3}\right)$

[3]　$0<\dfrac{4}{3}a<1$　すなわち　$0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき

$M(a)=f(1)$



以上から　　$0<a<\dfrac{3}{4}$，$3<a$ のとき　　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　　　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$