数学演習（対数関数）Ｈ２７．９．２３　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) $\log_{10}5$, $\log_{10}0.006$, $\log_{10}\sqrt{72}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 6^{50} は何桁の整数か。

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

$\boxed{2}$ $\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 3^n が 10 桁の数となる最小の自然数 n の値を求めよ。

(2) 3 進法で表すと 100 桁の自然数 N を，10 進法で表すと何桁の数になるか。

$\boxed{3}$ 12^{60} は $^{ア}\boxed{}$ 桁の整数である。また，その最高位の数は $^{イ}\boxed{}$ で，一の位の数は $^{ウ}\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\boxed{4}$ (1) $3^x=5$ を満たす x は無理数であることを示せ。

(2) $3^x5^{-2y}=5^x3^{y-6}$ を満たす有理数 x, y を求めよ。

5 (1)　a を定数とする。x の方程式 $4^{x+1}-2^{x+4}+5a+6=0$ が異なる 2 つの正の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　a を定数とする。x の方程式 $\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-2\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0$ の実数解の個数を求めよ。

6 $a>0$，$a\fallingdotseq 1$，$b>0$ とする。2 次方程式 $4x^2+4x\log_a b+1=0$ が $0<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲内にただ 1 つの解をもつようなすべての a，b を，座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示せよ。

7 次の問いに答えよ。ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。

(1)　100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2)　100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

1 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) $\log_{10}5$，$\log_{10}0.006$，$\log_{10}\sqrt{72}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 6^{50} は何桁の整数か。

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答　(1) $\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}0.006=-2.2219$，$\log_{10}\sqrt{72}=0.9286$

(2) 39 桁　(3) 小数第 18 位

解説

(1) $\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}0.006=\log_{10}(2\cdot 3\cdot 10^{-3})=\log_{10}2+\log_{10}3-3\log_{10}10=0.3010+0.4771-3$
$=-2.2219$

$\log_{10}\sqrt{72}=\log_{10}(2^3\cdot 3^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(3\log_{10}2+2\log_{10}3)=\frac{1}{2}(3\times 0.3010+2\times 0.4771)$
$=0.9286$

(2) $\log_{10}6^{50}=50\log_{10}6=50\log_{10}(2\cdot 3)=50(\log_{10}2+\log_{10}3)=50(0.3010+0.4771)$
$=38.905$

ゆえに　$38<\log_{10}6^{50}<39$　　よって　$10^{38}<6^{50}<10^{39}$

したがって，6^{50} は 39 桁の整数である。

(3) $\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{100}=100(\log_{10}2-\log_{10}3)=100(0.3010-0.4771)=-17.61$

ゆえに　$-18<\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{100}<-17$　　よって　$10^{-18}<\left(\frac{2}{3}\right)^{100}<10^{-17}$

ゆえに，小数第 18 位に初めて 0 でない数字が現れる。

2 $\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 3^n が 10 桁の数となる最小の自然数 n の値を求めよ。

(2) 3 進法で表すと 100 桁の自然数 N を，10 進法で表すと何桁の数になるか。

解答　(1) $n=19$　(2) 48 桁

解説

(1) 3^n が 10 桁の数であるとき　$10^9\leqq 3^n<10^{10}$

各辺の常用対数をとると　$9\leqq n\log_{10}3<10$

ゆえに　$9\leqq 0.4771n<10$　　よって　$\frac{9}{0.4771}\leqq n<\frac{10}{0.4771}$

したがって　$18.8\cdots\cdots\leqq n<20.9\cdots\cdots$

この不等式を満たす最小の自然数 n は　$n=19$

(2) N は 3 進法で表すと 100 桁の自然数であるから

$3^{100-1}\leqq N<3^{100}$　すなわち　$3^{99}\leqq N<3^{100}$

各辺の常用対数をとると

$99\log_{10}3\leqq\log_{10}N<100\log_{10}3$

ゆえに　$99\times 0.4771\leqq\log_{10}N<100\times 0.4771$

すなわち　$47.2329\leqq\log_{10}N<47.71$

よって　$10^{47.2329}\leqq N<10^{47.71}$　　ゆえに　$10^{47}<N<10^{48}$

したがって，N を 10 進法で表すと，48 桁の数となる。

別解　$\log_{10}3=0.4771$ から　$10^{0.4771}=3$

ゆえに，$3^{99}\leqq N<3^{100}$ から　$(10^{0.4771})^{99}\leqq N<(10^{0.4771})^{100}$

よって　$10^{47.2329}\leqq N<10^{47.71}$　　ゆえに　$10^{47}<N<10^{48}$

したがって，N を 10 進法で表すと，48 桁の数となる。

3 12^{60} は ア $\boxed{}$ 桁の整数である。また，その最高位の数は イ $\boxed{}$ で，一の位の数は ウ $\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　(ア) 65　(イ) 5　(ウ) 6

解説

(ア) $\log_{10}12^{60}=60\log_{10}(2^2\cdot 3)=60(2\log_{10}2+\log_{10}3)$
$=60(2\times 0.3010+0.4771)=64.746$

ゆえに　$64<\log_{10}12^{60}<65$　　よって　$10^{64}<12^{60}<10^{65}$

したがって，12^{60} は 65 桁の整数である。

(イ) (ア) から　$\log_{10}12^{60}=64+0.746$

ここで　$\log_{10}5=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

ゆえに　$\log_{10}5<0.746<\log_{10}6$　すなわち　$5<10^{0.746}<6$

よって　$5\cdot 10^{64}<10^{64.746}<6\cdot 10^{64}$

すなわち　$5\cdot 10^{64}<12^{60}<6\cdot 10^{64}$

したがって，12^{60} の最高位の数は　5

別解　(ア) から　$12^{60}=10^{64.746}=10^{64}\cdot 10^{0.746}$

$10^0<10^{0.746}<10^1$ であるから，$10^{0.746}$ の整数部分が 12^{60} の最高位の数である。

ここで，$\log_{10}5=0.6990$ より　$10^{0.6990}=5$

$\log_{10}6=0.7781$ より　$10^{0.7781}=6$

$10^{0.6990}<10^{0.746}<10^{0.7781}$ から　$5<10^{0.746}<6$

よって，最高位の数は　5

(ウ) 12^1，12^2，12^3，12^4，12^5，…… の一の位の数は，順に

2，4，8，6，2，……

となり，4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。

$60=4\times 15$ であるから，12^{60} の一の位の数は　6

4 (1) $3^x=5$ を満たす x は無理数であることを示せ。

(2) $3^x5^{-2y}=5^x3^{y-6}$ を満たす有理数 x，y を求めよ。

解答　(1) 略　(2) $x=-4$，$y=2$

解説

(1) $3^x=5$ を満たす x はただ 1 つ存在する。

その x が有理数であると仮定すると，$3^x=5>1$ であるから

$x>0$ で，$x=\frac{m}{n}$ (m，n は正の整数) と表される。

よって　$3^{\frac{m}{n}}=5$　　両辺を n 乗すると　$3^m=5^n$　…… ①

ここで，① の左辺は 3 の倍数であり，右辺は 3 の倍数ではないから，矛盾。

よって，x は有理数ではないから，無理数である。

(2) 等式から　$3^{x-y+6}=5^{x+2y}$　…… ②

$x+2y\fallingdotseq 0$ と仮定すると，② から　$3^{\frac{x-y+6}{x+2y}}=5$　…… ③

x，y を有理数とすると，$x-y+6$，$x+2y$ はともに有理数で $\frac{x-y+6}{x+2y}$ も有理数となり，(1) により ③ は成り立たない。

ゆえに　$x+2y=0$　…… ④

このとき，② から　$3^{x-y+6}=1$

よって　$x-y+6=0$　…… ⑤

④，⑤ を連立して解くと　$x=-4$，$y=2$

5 (1) a を定数とする。x の方程式 $4^{x+1}-2^{x+4}+5a+6=0$ が異なる 2 つの正の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2) a を定数とする。x の方程式 $\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-2\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0$ の実数解の個数を求めよ。

解答　(1) $\frac{6}{5}<a<2$

(2) $a>1$ のとき 0 個；$a=1$，$a<\frac{3}{4}$ のとき 2 個；$a=\frac{3}{4}$ のとき 3 個；

$\frac{3}{4}<a<1$ のとき 4 個

解説

(1) 与式から　$4(2^x)^2-16\cdot 2^x+5a+6=0$

$2^x=t$ とおくと，方程式は　$4t^2-16t+5a+6=0$　…… ①

$x>0$ のとき $t>1$ であるから，求める条件は，2 次方程式 ① が $t>1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことである。

すなわち，① の左辺を $f(t)$ とし，① の判別式を D とすると

[1] $D>0$　[2] 軸>1　[3] $f(1)>0$

[1] $\frac{D}{4}=(-8)^2-4(5a+6)=-20a+40>0$　…… ②

[2] 軸は直線 $t=2$ で，軸>1 の条件は満たされる。

[3] $f(1)=5a-6>0$　…… ③

②，③ から　$\frac{6}{5}<a<2$

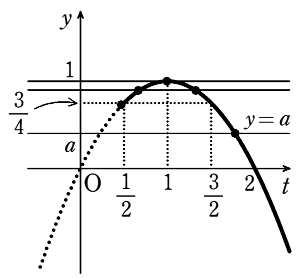
(2) $\log_2(x^2+\sqrt{2})=t$ …… ① とおくと，方程式は　$t^2-2t+a=0$

$x^2\geqq 0$ より $x^2+\sqrt{2}\geqq\sqrt{2}$ であるから　$\log_2(x^2+\sqrt{2})\geqq\log_2\sqrt{2}$

したがって　$t\geqq\frac{1}{2}$　…… ②

① を満たす x の個数は，$t=\frac{1}{2}$ のとき $x=0$ の 1 個，$t>\frac{1}{2}$ のとき $x^2>0$ であるから 2 個。

$t^2-2t+a=0$ より，$-t^2+2t=a$ であるから，② の範囲における，放物線 $y=-t^2+2t$ と直線 $y=a$ の共有点の t 座標に注意して，方程式の実数解の個数を調べると

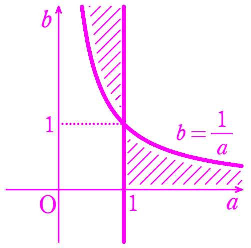


$a>1$ のとき 0 個；$a=1$，$a<\frac{3}{4}$ のとき 2 個；

$a=\frac{3}{4}$ のとき 3 個；$\frac{3}{4}<a<1$ のとき 4 個

6 $a>0$，$a \neq 1$，$b>0$ とする。2 次方程式 $4x^2+4x\log_a b+1=0$ が $0<x<\frac{1}{2}$ の範囲内にただ 1 つの解をもつようなすべての a，b を，座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示せよ。

解答 ［図］ 境界線を含まない



解説

$f(x)=4x^2+4x\log_a b+1$ とし，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$f(x)=0$ が重解をもつための条件は　$D=0$

ここで　$\frac{D}{4}=(2\log_a b)^2-4\cdot 1=4\{(\log_a b)^2-1\}$

よって　$(\log_a b)^2=1$　すなわち　$\log_a b=\pm 1$　　ゆえに　$b=a,\ \frac{1}{a}$

このとき，$f(x)=0$ の重解は　$x=-\frac{4\log_a b}{2\cdot 4}=-\frac{\log_a b}{2}$

$b=a$ のとき　$x=-\frac{1}{2}$　　$b=\frac{1}{a}$ のとき　$x=\frac{1}{2}$

この重解は $0<x<\frac{1}{2}$ の範囲内にない。

また，$f(0)=1>0$，軸は直線 $x=-\frac{\log_a b}{2}$ であるから，$f(x)=0$ が $0<x<\frac{1}{2}$ の範囲内にただ 1 つの解をもつための条件は，次の [1]，[2] のいずれかが成り立つことである。

[1]　$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　[2]　$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ かつ $0<-\frac{\log_a b}{2}<\frac{1}{2}$

[1] のとき，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2+2\log_a b$ であるから　$2+2\log_a b<0$

よって　$\log_a b<-1$　すなわち　$\log_a b<\log_a \frac{1}{a}$

$0<a<1$ のとき　$b>\frac{1}{a}$

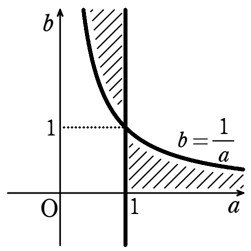
$a>1$ のとき　$b<\frac{1}{a}$　　$b>0$ であるから　$0<b<\frac{1}{a}$

[2] のとき，$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ から　$\log_a b=-1$　…… ①

$0<-\frac{\log_a b}{2}<\frac{1}{2}$ から　$-1<\log_a b<0$　…… ②

①，② を同時に満たす組 $(a,\ b)$ はない。

以上から，条件を満たす a，b を座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示すると，右図の斜線部分のようになる。
ただし，境界線を含まない。



7 次の問いに答えよ。ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。

(1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

解答 (1) 333 個　　(2) 476 個

解説

(1) $2^n<10^{100}$ を満たす 0 以上の整数 n の個数を求める。

$2^n<10^{100}$ の両辺の常用対数をとると

$\log_{10}2^n<\log_{10}10^{100}$　すなわち　$n\log_{10}2<100$

ゆえに　$n<\frac{100}{\log_{10}2}$　…… ①

$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ から　$\frac{100}{0.3011}<\frac{100}{\log_{10}2}<\frac{100}{0.3010}$

$\frac{100}{0.3011}=332.1\cdots$，$\frac{100}{0.3010}=332.2\cdots$ であるから，$0\leqq n\leqq 332$ の範囲の整数 n は不等式 ① を満たす。

その個数を求めると　$332-0+1=333$ (個)

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数は，

$10^{99}\leqq 2^m5^n<10^{100}$　…… ② を満たす 0 以上の整数 m，n の組 $(m,\ n)$ の個数である。

[1] $m\geqq n$ のとき

$n\geqq 100$ とすると，$m\geqq 100$ であるが，このとき，$2^m5^n\geqq 2^{100}\cdot 5^{100}$ となり，$2^m5^n<10^{100}$ を満たさない。

ゆえに　$n=0，1，2，\cdots\cdots，99$

② の両辺を 10^n で割ると　$10^{99-n}\leqq 2^{m-n}<10^{100-n}$　…… ③

この不等式を満たす $(m,\ n)$ の組の個数は，$(100-n)$ 桁の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を表している。

$n=0，1，2，\cdots\cdots，99$ であるから，③ を満たす $(m,\ n)$ の組の個数は，100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数と同じである。

その個数は，(1) から　333 個

[2] $m\leqq n$ のとき

[1] と同様に考えて，② の両辺を 10^m で割ると

$10^{99-m}\leqq 5^{n-m}<10^{100-m}$　…… ④

ただし　$m=0，1，2，\cdots\cdots，99$

④ を満たす $(m,\ n)$ の組の個数は，100 桁以下の自然数で，5 以外の素因数をもたないものの個数，すなわち，$5^m<10^{100}$ を満たす 0 以上の整数 m の個数と同じである。

$5^m<10^{100}$ の両辺の常用対数をとると

$\log_{10}5^m<\log_{10}10^{100}$　　ゆえに　$m(1-\log_{10}2)<100$

よって　$m<\frac{100}{1-\log_{10}2}$　…… ⑤

$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であるから，$1-0.3011<1-\log_{10}2<1-0.3010$ より

$\frac{100}{0.6990}<\frac{100}{1-\log_{10}2}<\frac{100}{0.6989}$

$\frac{100}{0.6990}=143.06\cdots$，$\frac{100}{0.6989}=143.08\cdots$ であるから，$0\leqq m\leqq 143$ の範囲の整数 m は，不等式 ⑤ を満たす。

その個数は　$143-0+1=144$ (個)

[1]，[2] では，$m=n=99$ すなわち $2^{99}\cdot 5^{99}=10^{99}$ の場合を重複して数えているから，求める個数は　$333+144-1=476$ (個)