数学演習（対数関数）Ｈ２７．９．２２　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の関数のグラフをかけ。また，関数 $y=\log_4 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

(1) $y=\log_4(x+3)$　(2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$　(3) $y=\log_4(4x-8)$

2 次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) 1.5，$\log_3 5$　(2) 2，$\log_4 9$，$\log_2 5$

(3) $\log_{0.5} 3$，$\log_{0.5} 2$，$\log_3 2$，$\log_5 2$

3 次の方程式を解け。

(1) $\log_3 x+\log_3(x-2)=1$　(2) $\log_2(x^2+5x+2)-\log_2(2x+3)=2$

(3) $\log_2(x+2)=\log_4(5x+16)$

4 次の方程式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2-2\log_3 x=3$　(2) $\log_2 x+6\log_x 2=5$

5 次の不等式を解け。

(1) $\log_{0.3}(2-x)\geqq\log_{0.3}(3x+14)$　(2) $\log_2(x-2)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(3) $(\log_2 x)^2-\log_2 4x>0$

6 (1) 不等式 $\log_4 x^2-\log_x 64\leqq 1$ を解け。

(2) $0<x<1$，$0<y<1$ とする。不等式 $\log_x y+2\log_y x-3>0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

7 (1) 関数 $y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$ の最大値を求めよ。

(2) $1\leqq x\leqq 5$ のとき，関数 $y=2\log_5 x+(\log_5 x)^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ のとき，関数 $y=(\log_3 3x)\left(\log_3\dfrac{x}{27}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

8 $x\geqq 3$，$y\geqq\dfrac{1}{3}$，$xy=27$ のとき，$(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。

9 不等式 $\log_2 m^3+\log_3 n^2\leqq 3$ を満たす自然数 m，n の組の個数を求めよ。

数学演習（対数関数）Ｈ２７．９．２２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 次の関数のグラフをかけ。また，関数 $y=\log_4 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

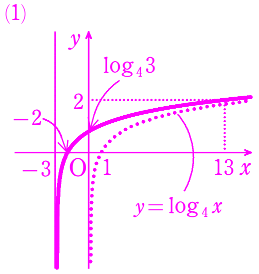
(1) $y=\log_4(x+3)$　　(2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$　　(3) $y=\log_4(4x-8)$

解答 (1) ［図］ $y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したもの

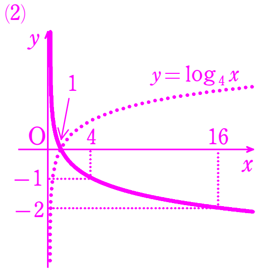
(2) ［図］ $y=\log_4 x$ のグラフを x 軸に関して対称に移動したもの

(3) ［図］ $y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの

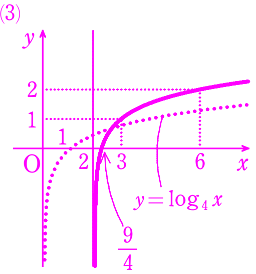
(1)



(2)



(3)



解説

(1) $y=\log_4(x+3)=\log_4\{x-(-3)\}$

したがって，$y=\log_4(x+3)$ のグラフは，$y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。よって，そのグラフは図 (1) の太い実線部分のようになる。

(2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x=\dfrac{\log_4 x}{\log_4 \frac{1}{4}}=\dfrac{\log_4 x}{\log_4 4^{-1}}=-\log_4 x$

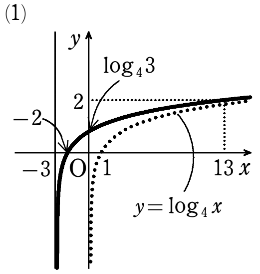
したがって，$y=\log_{\frac{1}{4}} x$ のグラフは，$y=\log_4 x$ のグラフを x 軸に関して対称に移動したものである。よって，そのグラフは図 (2) の太い実線部分のようになる。

(3) $y=\log_4(4x-8)=\log_4 4(x-2)=\log_4(x-2)+1$

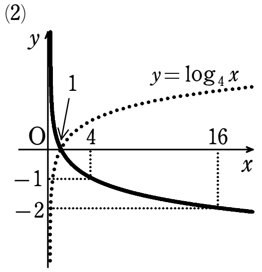
したがって，$y=\log_4(4x-8)$ のグラフは，$y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

よって，そのグラフは図 (3) の太い実線部分のようになる。

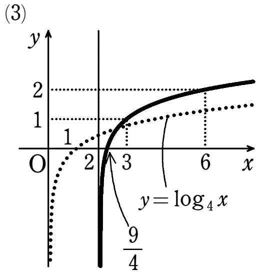
(1)



(2)



(3)



2 次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) 1.5，$\log_3 5$　　(2) 2，$\log_4 9$，$\log_2 5$

(3) $\log_{0.5}3$，$\log_{0.5}2$，$\log_3 2$，$\log_5 2$

解答 (1) $1.5>\log_3 5$　(2) $\log_4 9<2<\log_2 5$

(3) $\log_{0.5}3<\log_{0.5}2<\log_5 2<\log_3 2$

解説

(1) $1.5=\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_3 3=\log_3 3^{\frac{3}{2}}$　　また　$(3^{\frac{3}{2}})^2=3^3=27>5^2$

底 3 は 1 より大きく，$3^{\frac{3}{2}}>5$ であるから　$\log_3 3^{\frac{3}{2}}>\log_3 5$

したがって　$1.5>\log_3 5$

(2) $2=2\log_2 2=\log_2 2^2=\log_2 4$，$\log_4 9=\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}=\log_2 3$

底 2 は 1 より大きく，$3<4<5$ であるから

$\log_2 3<\log_2 4<\log_2 5$　すなわち　$\log_4 9<2<\log_2 5$

(3) 底 0.5 は 1 より小さく，$3>2>1$ であるから

$\log_{0.5}3<\log_{0.5}2<0$

$\log_3 2=\dfrac{1}{\log_2 3}$，$\log_5 2=\dfrac{1}{\log_2 5}$ で，底 2 は 1 より大きく，$1<3<5$ であるから

$0<\log_2 3<\log_2 5$

よって　$0<\dfrac{1}{\log_2 5}<\dfrac{1}{\log_2 3}$　すなわち　$0<\log_5 2<\log_3 2$

したがって　$\log_{0.5}3<\log_{0.5}2<\log_5 2<\log_3 2$

3 次の方程式を解け。

(1) $\log_3 x+\log_3(x-2)=1$　　(2) $\log_2(x^2+5x+2)-\log_2(2x+3)=2$

(3) $\log_2(x+2)=\log_4(5x+16)$

解答 (1) $x=3$　(2) $x=5$　(3) $x=4$

解説

(1) 真数は正であるから，$x>0$ かつ $x-2>0$ より　$x>2$

方程式から　$\log_3 x(x-2)=\log_3 3$

したがって　$x(x-2)=3$　整理して　$x^2-2x-3=0$

ゆえに　$(x+1)(x-3)=0$　よって　$x=-1$，3

$x>2$ であるから，解は　$x=3$

(2) 真数は正であるから　$x^2+5x+2>0$，$2x+3>0$ ……①

方程式から　$\log_2(x^2+5x+2)=\log_2 4+\log_2(2x+3)$

よって　$\log_2(x^2+5x+2)=\log_2 4(2x+3)$

したがって　$x^2+5x+2=4(2x+3)$

整理して　$x^2-3x-10=0$

ゆえに　$(x+2)(x-5)=0$

よって　$x=-2$，5

このうち，① を満たすものが解であるから　$x=5$

(3) 真数は正であるから，$x+2>0$ かつ $5x+16>0$ より　$x>-2$

$\log_4(5x+16)=\dfrac{\log_2(5x+16)}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2(5x+16)$ であるから，

方程式は　$\log_2(x+2)=\dfrac{1}{2}\log_2(5x+16)$

よって　$\log_2(x+2)^2=\log_2(5x+16)$

したがって　$(x+2)^2=5x+16$　整理して　$x^2-x-12=0$

ゆえに　$(x+3)(x-4)=0$　よって　$x=-3$，4

$x>-2$ であるから，解は　$x=4$

4 次の方程式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2-2\log_3 x=3$　　(2) $\log_2 x+6\log_x 2=5$

解答 (1) $x=\dfrac{1}{3}$，27　(2) $x=4$，8

解説

(1) 真数は正であるから　$x>0$ ……①

方程式から　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-3)=0$

よって　$\log_3 x=-1$，3

$\log_3 x=-1$ から　$x=\dfrac{1}{3}$　　$\log_3 x=3$ から　$x=27$

これらの x の値は ① を満たす。ゆえに，解は　$x=\dfrac{1}{3}$，27

(2) 真数は正で，底は 1 でない正の数であるから　$0<x<1$，$1<x$ ……①

このとき，方程式の両辺に $\log_2 x$ を掛けて

$(\log_2 x)^2+6=5\log_2 x$

整理して　$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

ゆえに　$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$　よって　$\log_2 x=2$，3

$\log_2 x=2$ から　$x=4$　　$\log_2 x=3$ から　$x=8$

これらの x の値は ① を満たす。ゆえに，解は　$x=4$，8

5 次の不等式を解け。

(1) $\log_{0.3}(2-x)\geqq\log_{0.3}(3x+14)$　　(2) $\log_2(x-2)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(3) $(\log_2 x)^2-\log_2 4x>0$

解答 (1) $-3\leqq x<2$　(2) $4<x<3+\sqrt{3}$　(3) $0<x<\dfrac{1}{2}$，$4<x$

解説

(1) 真数は正であるから，$2-x>0$ かつ $3x+14>0$ より　$-\dfrac{14}{3}<x<2$ ……①

底 0.3 は 1 より小さいから，不等式より　$2-x\leqq 3x+14$

よって　$x\geqq -3$ ……②

①，② の共通範囲を求めて　$-3\leqq x<2$

(2) 真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $x-4>0$ より　$x>4$

$1=\log_2 2$，$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=-\log_2(x-4)$ であるから，不等式は

$\log_2(x-2)<\log_2 2-\log_2(x-4)$

ゆえに　$\log_2(x-2)+\log_2(x-4)<\log_2 2$

よって　$\log_2(x-2)(x-4)<\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x-2)(x-4)<2$

ゆえに　$x^2-6x+6<0$　よって　$3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3}$

$x>4$ との共通範囲を求めて　$4<x<3+\sqrt{3}$

(3) 真数は正であるから　$x>0$ ……①

$\log_2 4x=2+\log_2 x$ であるから，不等式は　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-2>0$

ゆえに　$(\log_2 x+1)(\log_2 x-2)>0$

よって　$\log_2 x<-1$，$2<\log_2 x$

したがって　$\log_2 x<\log_2\frac{1}{2}$，$\log_2 4<\log_2 x$

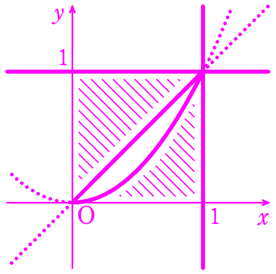
底2は1より大きいことと，①から　$0<x<\frac{1}{2}$，$4<x$

6 (1) 不等式 $\log_4 x^2-\log_x 64\leqq 1$ を解け。

(2) $0<x<1$，$0<y<1$ とする。不等式 $\log_x y+2\log_y x-3>0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

解答　(1) $0<x\leqq\frac{1}{4}$，$1<x\leqq 8$

(2) ［図］境界線を含まない



解説

(1) 真数，底の条件から　$0<x<1$，$1<x$

$\log_4 x^2=\frac{\log_2 x^2}{\log_2 4}=\frac{2\log_2 x}{2}=\log_2 x$，$\log_x 64=\frac{\log_2 64}{\log_2 x}=\frac{6}{\log_2 x}$ であるから，不等式は　$\log_2 x-\frac{6}{\log_2 x}\leqq 1$ ……①

[1] $0<x<1$ のとき　$\log_2 x<0$

①の両辺に $\log_2 x$ を掛けて　$(\log_2 x)^2-6\geqq\log_2 x$

整理して　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-6\geqq 0$

ゆえに　$(\log_2 x+2)(\log_2 x-3)\geqq 0$

$\log_2 x<0$ より $\log_2 x-3<0$ であるから　$\log_2 x+2\leqq 0$

よって　$\log_2 x\leqq -2$

底2は1より大きいから　$x\leqq 2^{-2}$　すなわち　$x\leqq\frac{1}{4}$

$0<x<1$ との共通範囲は　$0<x\leqq\frac{1}{4}$

[2] $x>1$ のとき　$\log_2 x>0$

①の両辺に $\log_2 x$ を掛けて　$(\log_2 x)^2-6\leqq\log_2 x$

整理して　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-6\leqq 0$

ゆえに　$(\log_2 x+2)(\log_2 x-3)\leqq 0$

$\log_2 x>0$ より $\log_2 x+2>0$ であるから　$\log_2 x-3\leqq 0$

よって　$0<\log_2 x\leqq 3$

底2は1より大きいから　$2^0<x\leqq 2^3$　すなわち　$1<x\leqq 8$

[1]，[2]から，解は　$0<x\leqq\frac{1}{4}$，$1<x\leqq 8$

(2) $0<x<1$，$0<y<1$ であるから　$\log_x y>0$

与えられた不等式から　$\log_x y+2\cdot\frac{1}{\log_x y}-3>0$

両辺に $\log_x y$ (>0) を掛けて整理すると

$(\log_x y)^2-3\log_x y+2>0$

よって　$(\log_x y-1)(\log_x y-2)>0$

$\log_x y>0$ であるから

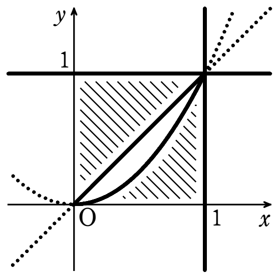
$0<\log_x y<1$　または　$2<\log_x y$ ……①

底 x は $0<x<1$ であるから，①より

$x<y<1$　または　$y<x^2$

ゆえに，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



7 (1) 関数 $y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$ の最大値を求めよ。

(2) $1\leqq x\leqq 5$ のとき，関数 $y=2\log_5 x+(\log_5 x)^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) $\frac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ のとき，関数 $y=(\log_3 3x)\left(\log_3\frac{x}{27}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1) $x=\frac{5}{2}$ で最大値 -2　(2) $x=5$ で最大値3，$x=1$ で最小値0

(3) $x=\frac{1}{3}$，27 で最大値0；$x=3$ で最小値 -4

解説

(1) 真数は正であるから　$x-2>0$ かつ $3-x>0$

よって　$2<x<3$ ……①

$2\log_4(3-x)=2\cdot\frac{\log_2(3-x)}{\log_2 4}=\log_2(3-x)$ であるから

$y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)=\log_2(x-2)+\log_2(3-x)$

$=\log_2(x-2)(3-x)=\log_2(-x^2+5x-6)$

$z=-x^2+5x-6$ とすると　$z=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

①の範囲において，z は $x=\frac{5}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

対数の底2は1より大きいから，このとき y も最大となる。

よって　$x=\frac{5}{2}$ で最大値 $\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

(2) $\log_5 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 5$ であるから

$\log_5 1\leqq t\leqq\log_5 5$　すなわち　$0\leqq t\leqq 1$ ……①

y を t の式で表すと　$y=2t+t^2=(t+1)^2-1$

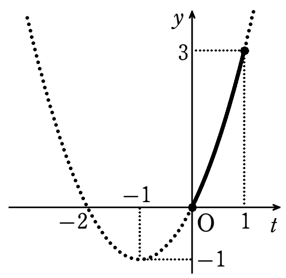
①の範囲において，y は

$t=1$ で最大値3，$t=0$ で最小値0

をとる。$t=\log_5 x$ より，$x=5^t$ であるから

$t=1$ のとき　$x=5$，　$t=0$ のとき　$x=5^0=1$

よって　$x=5$ で最大値3，$x=1$ で最小値0



(3) $\log_3 x=t$ とおくと，$\frac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ であるから

$\log_3\frac{1}{3}\leqq t\leqq\log_3 27$

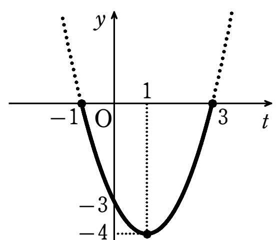
すなわち　$-1\leqq t\leqq 3$ ……①

$\log_3 3x=1+\log_3 x$，$\log_3\frac{x}{27}=\log_3 x-3$ であるから，y を t の式で表すと

$y=(1+t)(t-3)=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$

①の範囲において，y は

$t=-1$，3 で最大値0，$t=1$ で最小値 -4



をとる。$t=\log_3 x$ より，$x=3^t$ であるから

$t=-1$ のとき　$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$，　$t=3$ のとき　$x=3^3=27$，

$t=1$ のとき　$x=3$

よって　$x=\frac{1}{3}$，27 で最大値0；$x=3$ で最小値 -4

8 $x\geqq 3$，$y\geqq\frac{1}{3}$，$xy=27$ のとき，$(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=y=3\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{4}$；$x=81$，$y=\frac{1}{3}$ で最小値 -4

解説

$x\geqq 3$，$y\geqq\frac{1}{3}$，$xy=27$ の各辺の3を底とする対数をとると

$\log_3 x\geqq 1$，$\log_3 y\geqq -1$，$\log_3 x+\log_3 y=3$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおくと

$X\geqq 1$，$Y\geqq -1$，$X+Y=3$

$X+Y=3$ から　$Y=3-X$ ……①

$Y\geqq -1$ であるから　$3-X\geqq -1$　ゆえに　$X\leqq 4$

$X\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq X\leqq 4$ ……②

また　$(\log_3 x)(\log_3 y)=XY=X(3-X)=-X^2+3X$

$=-\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

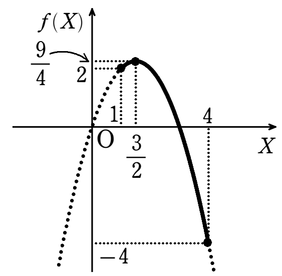
これを $f(X)$ とすると，②の範囲において，$f(X)$ は

$X=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$X=4$ で最小値 -4 をとる。

①から　$X=\frac{3}{2}$ のとき　$Y=\frac{3}{2}$，$X=4$ のとき　$Y=-1$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ より，$x=3^X$，$y=3^Y$ であるから

$x=y=3\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{4}$；$x=81$，$y=\frac{1}{3}$ で最小値 -4



9 不等式 $\log_2 m^3+\log_3 n^2\leqq 3$ を満たす自然数 m，n の組の個数を求めよ。

解答　6

解説

$\log_2 m^3+\log_3 n^2\leqq 3$ から　$3\log_2 m+2\log_3 n\leqq 3$ ……①

$\log_3 n\geqq 0$ であるから　$3\log_2 m\leqq 3\log_2 m+2\log_3 n\leqq 3$

よって，$3\log_2 m\leqq 3$ であるから　$\log_2 m\leqq 1$

m は自然数であるから　$m=1$，2

$m=1$ のとき，①から　$2\log_3 n\leqq 3$　すなわち　$\log_3 n\leqq\frac{3}{2}$

底3は1より大きいから　$n\leqq 3^{\frac{3}{2}}$　よって　$n^2\leqq 3^3=27$

n は自然数であるから，n のとりうる値は $n=1$，2，3，4，5 の5個。

$m=2$ のとき，①から　$3+2\log_3 n\leqq 3$　すなわち　$\log_3 n\leqq 0$

n は自然数であるから，$\log_3 n\leqq 0$ となる n の値は $n=1$ の1個。

以上から，①を満たす自然数 m，n の組の個数は　$5+1=6$