数学演習（対数関数）Ｈ２４．６．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_5 x=2$　(2) $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$　(3) $\log_2 x=\frac{1}{2}$

(4) $\log_4 x<2$　(5) $\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　(6) $\log_{\frac{1}{6}} x<-2$

2．次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_{0.2} x=-2$　(2) $\log_{27} x>\frac{1}{3}$

3．次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_4(x-3)=\frac{1}{2}$　(2) $\log_2(x+1)>1$　(3) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$

4．次の数の大小関係を不等号で表せ。

(1) $\log_3 0.8$，$\log_3 5$，$\log_3 7$　(2) $\log_{0.2} 0.6$，$\log_{0.2} 4$，$\log_{0.2} 8$

(3) $3\log_4 3$，$2\log_2 3$，$3$

5．次の方程式を解け。

(1) $\log_4(x+3)=\log_4(2x+2)$　(2) $\log_2(x^2+x-2)=2$

(3) $\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　(4) $(\log_3 x)^2=\log_3 x^2+3$

6．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの $x$ の値を求めよ。

(1)　$y=(\log_3 x)^2-6\log_3 x+8$ $(1\leqq x\leqq 27)$

(2)　$y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4$ $(1\leqq x\leqq 32)$

7．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$(\log_2 x)^2=\log_2 4x$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)$

8．次の不等式を解け。

(1)　$\log_5(2x+3)<\log_5(x+5)$

(2)　$2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$

(3)　$(\log_2 x+3)(\log_2 x-1)>0$

(4)　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^3-4\leqq 0$

1．次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_5 x=2$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$　　(3) $\log_2 x=\frac{1}{2}$

(4) $\log_4 x<2$　　(5) $\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　　(6) $\log_{\frac{1}{6}} x<-2$

解答　(1) $x=25$　(2) $x=9$　(3) $x=\sqrt{2}$　(4) $0<x<16$　(5) $0<x\leqq\frac{1}{8}$

(6) $x>36$

解説

参考　$\log_a M=p$　ならば　$M=a^p$　と書きなおすことができる

(1) 真数は正より　$x>0$　…①

方程式から $\log_5 x=2$　より　$x=5^2$　　すなわち　$x=25$　これは①を満たす。

(2) 真数は正より　$x>0$　…①　方程式から $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$　より　$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

すなわち　$x=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$　これは①を満たす。

(3) 真数は正より　$x>0$　…①　方程式から　$x=2^{\frac{1}{2}}$

すなわち　$x=\sqrt{2}$　これは①を満たす。

(4) 真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_4 x<\log_4 4^2$

すなわち　$\log_4 x<\log_4 16$

底 4 は 1 より大きいから　$x<16$　……②

①，② から共通範囲をとって，不等式の解は　$0<x<16$

(5) 真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq\frac{1}{8}$　……②

①，② から共通範囲をとって，不等式の解は　$0<x\leqq\frac{1}{8}$

(6) 真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

よって　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}}(6^{-1})^{-2}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}} 36$　　（ $(6^{-1})^{-2}=6^{(-1)\times(-2)}=6^2=36$ ）

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$x>36$

①との共通範囲より　$x>36$

2．次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_{0.2} x=-2$　　(2) $\log_{27} x>\frac{1}{3}$

解答　(1) $x=25$　(2) $x>3$

解説

(1) 真数は正より　$x>0$　…①

方程式から　$x=0.2^{-2}$

よって　$0.2^{-2}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=(5^{-1})^{-2}=5^{(-1)\times(-2)}=5^2=25$

これは①を満たす。

(2) 真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{27} x>\log_{27} 27^{\frac{1}{3}}$

すなわち　$27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3^{3\times\frac{1}{3}}=3^1=3$　より　$\log_{27} x>\log_{27} 3$

底 27 は 1 より大きいから　$x>3$

①との共通範囲より　$x>3$

3．次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_4(x-3)=\frac{1}{2}$　　(2) $\log_2(x+1)>1$　　(3) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$

解答　(1) $x=5$　(2) $x>1$　(3) $1<x<\frac{4}{3}$

解説

(1) 真数は正であるから　$x-3>0$

したがって　$x>3$

方程式は　$\log_4(x-3)=\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　$x-3=4^{\frac{1}{2}}$　　よって　$x-3=\sqrt{4}$　より

$x-3=2$　から　$x=5$

これは $x>3$ を満たすから，解である。

(2) 真数は正であるから　$x+1>0$

ゆえに　$x>-1$　……①

不等式は　$\log_2(x+1)>\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$x+1>2$

よって　$x>1$　……②

①，② から共通範囲より，解は　$x>1$

(3) 真数は正であるから　$x-1>0$

ゆえに　$x>1$　……①

不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1<\frac{1}{3}$

よって　$x<\frac{4}{3}$　……②

①，② から共通範囲より，解は　$1<x<\frac{4}{3}$

4．次の数の大小関係を不等号で表せ。

(1) $\log_3 0.8$，$\log_3 5$，$\log_3 7$　　(2) $\log_{0.2} 0.6$，$\log_{0.2} 4$，$\log_{0.2} 8$

(3) $3\log_4 3$，$2\log_2 3$，3

解答　(1) $\log_3 0.8<\log_3 5<\log_3 7$　(2) $\log_{0.2} 8<\log_{0.2} 4<\log_{0.2} 0.6$

(3) $3\log_4 3<3<2\log_2 3$

解説

(1) 真数について　$0.8<5<7$

底 3 は 1 より大きいから　$\log_3 0.8<\log_3 5<\log_3 7$

(2) 真数について　$0.6<4<8$

底 0.2 は 1 より小さいから　$\log_{0.2} 8<\log_{0.2} 4<\log_{0.2} 0.6$

(3) 底をそろえる。また，少し工夫する。

$3\log_4 3=3\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}=3\cdot\frac{\log_2 3}{2}=\frac{3}{2}\log_2 3=\frac{1}{2}\log_2 3^3=\frac{1}{2}\log_2 27$，

$2\log_2 3=\frac{4}{2}\log_2 3=\frac{1}{2}\log_2 3^4=\frac{1}{2}\log_2 81$，

$3=\frac{6}{2}=\frac{6}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}\log_2 2^6=\frac{1}{2}\log_2 64$

底 2 は 1 より大きく，$27<64<81$ であるから　$\log_2 27<\log_2 64<\log_2 81$

つまり　$\frac{1}{2}\log_2 27<\frac{1}{2}\log_2 64<\frac{1}{2}\log_2 81$

すなわち　$3\log_4 3<3<2\log_2 3$

5．次の方程式を解け。

(1) $\log_4(x+3)=\log_4(2x+2)$　　(2) $\log_2(x^2+x-2)=2$

(3) $\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(4) $(\log_3 x)^2=\log_3 x^2+3$

解答　(1) $x=1$　(2) $x=2,\ -3$　(3) $x=1$　(4) $x=\frac{1}{3},\ 27$

解説

(1) 真数は正であるから　$x+3>0$ かつ $2x+2>0$

これを解いて共通範囲から　$x>-1$　……①

方程式から　$x+3=2x+2$

したがって　$x=1$

これは，① を満たすから，解である。

(2) 真数は正であるから　$x^2+x-2>0$

ゆえに　$(x+2)(x-1)>0$

よって　$x<-2,\ 1<x$　……①

方程式から　$x^2+x-2=2^2$

整理して　$x^2+x-6=0$

ゆえに　$(x-2)(x+3)=0$

よって　$x=2,\ -3$

これは ① を満たすから，解である。

(3) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$

これを解いて共通範囲から　$x>0$　……①

方程式から　$\log_2 x(x+3)=\log_2 2^2$

ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理して　$x^2+3x-4=0$

よって　$(x-1)(x+4)=0$

したがって　$x=1,\ -4$

① を満たすのは　$x=1$

(4) $\log_3 x^2=2\log_3 x$　より方程式は　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

また、真数は正より　$x>0$　…①

ゆえに　$t=\log_3 x$　とおくと　$t^2-2t-3=0$

解くと　$(t-3)(t+1)=0$　より　$t=-1,3$

$t$ を戻して　$\log_3 x=-1,\ 3$

したがって　$x=3^{-1},\ 3^3$　から　$x=\dfrac{1}{3},\ 27$　これは①を満たす

6．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの $x$ の値を求めよ。

(1)　$y=(\log_3 x)^2-6\log_3 x+8\ (1\leqq x\leqq 27)$

(2)　$y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4\ (1\leqq x\leqq 32)$

解答　(1)　$x=1$ のとき最大値 8，$x=27$ のとき最小値 $-1$

(2)　$x=4$ のとき最大値 4，$x=32$ のとき最小値 $-5$

解説

(1)　$\log_3 x=t$ とおく。

$1\leqq x\leqq 27$ であるから　底3は1より大きいから

$\log_3 1\leqq \log_3 x\leqq \log_3 27$

すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　……①

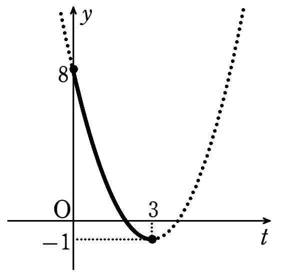
$y$ を $t$ の式で表すと　$y=t^2-6t+8=(t-3)^2-1$

グラフより①の範囲において，$y$ は

$t=0$ のとき最大値 8,

$t=3$ のとき最小値 $-1$

をとる。




$t=0$ となるのは，$\log_3 x=0$ から　$x=3^0$　つまり　$x=1$

$t=3$ となるのは，$\log_3 x=3$ から　$x=3^3$　つまり　$x=27$

のときである。

したがって，$y$ は，$x=1$ のとき最大値 8，$x=27$ のとき最小値 $-1$ をとる。

(2)　$y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x$

$\log_2 x=t$ とおく。

$1\leqq x\leqq 32$ であるから　底2は1より大きいので

$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 32$

すなわち　$0\leqq t\leqq 5$　……①

$y$ を $t$ の式で表すと

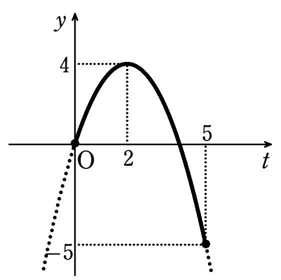
$y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

① の範囲において，$y$ は

$t=2$ のとき最大値 4,

$t=5$ のとき最小値 $-5$

をとる。




$t=2$ となるのは，$\log_2 x=2$ から　$x=2^2$　より　$x=4$

$t=5$ となるのは，$\log_2 x=5$ から　$x=2^5$　より　$x=32$

のときである。

したがって，$y$ は，$x=4$ のとき最大値 4，$x=32$ のとき最小値 $-5$ をとる。

7．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$(\log_2 x)^2=\log_2 4x$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)$

解答　(1)　$x=\dfrac{1}{2},\ 4$　　(2)　$-1<x<\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　$\log_2 4x=\log_2 4+\log_2 x$　なので

方程式は　$(\log_2 x)^2=\log_2 x+\log_2 4$　となる。$\log_2 4=2$なので

$(\log_2 x)^2-\log_2 x-2=0$　となる。ここで，$t=\log_2 x$　とおくと

$t^2-t-2=0$　より　$(t-2)(t+1)=0$　から　$t=-1,\ 2$

したがって $t$ を戻して　$\log_2 x=-1,\ 2$

ゆえに　$x=2^{-1},\ 2^2$　より　$x=\dfrac{1}{2},\ 4$

(2)　真数は正であるから　$x+1>0$ かつ $3-2x>0$

共通範囲より　$-1<x<\dfrac{3}{2}$　……①

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから，不等式より　$x+1<3-2x$

よって　$x<\dfrac{2}{3}$　……②

①，② から共通範囲より，解は　$-1<x<\dfrac{2}{3}$

8．次の不等式を解け。

(1)　$\log_5(2x+3)<\log_5(x+5)$　　(2)　$2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$

(3)　$(\log_2 x+3)(\log_2 x-1)>0$　　(4)　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^3-4\leqq 0$

解答　(1)　$-\dfrac{3}{2}<x<2$　　(2)　$2<x<5$　　(3)　$0<x<\dfrac{1}{8},\ 2<x$

(4)　$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 2$

解説

(1)　真数は正であるから　$2x+3>0$ かつ $x+5>0$

これを解いて　$x>-\dfrac{3}{2}$　……①

底 5 は 1 より大きいから，不等式より

$2x+3<x+5$

よって　$x<2$　……②

①，② から共通範囲より，解は　$-\dfrac{3}{2}<x<2$

(2)　真数は正であるから　$x-2>0$ かつ $x+4>0$

これを解いて　$x>2$　……①

ここで，$2\log_{0.2}(x-2)=\log_{0.2}(x-2)^2$ より

不等式から　$\log_{0.2}(x-2)^2>\log_{0.2}(x+4)$

底 0.2 は 1 より小さいから　$(x-2)^2<x+4$

整理すると　$x^2-5x<0$

よって解いて　$0<x<5$　……②

①，② から共通範囲より，解は　$2<x<5$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

$t=\log_2 x$　とおくと　$(t+3)(t-1)>0$　より　$t<-3,\ 1<t$

$t$ を戻して　$\log_2 x<-3,\ 1<\log_2 x$

よって　$\log_2 x<\log_2 2^{-3},\ \log_2 2^1<\log_2 x$

より　$\log_2 x<\log_2\dfrac{1}{8},\ \log_2 2<\log_2 x$

底 2 は 1 より大きいから　$x<\dfrac{1}{8},\ 2<x$　……②

①，② から共通範囲より，解は　$0<x<\dfrac{1}{8},\ 2<x$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

$\log_{\frac{1}{2}} x^3=3\log_{\frac{1}{2}} x$　より　不等式は

$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-3\log_{\frac{1}{2}} x-4\leqq 0$　となる。

ゆえに　$t=\log_{\frac{1}{2}} x$　とおくと　$t^2-3t-4\leqq 0$　より

$(t-4)(t+1)\leqq 0$　から　$-1\leqq t\leqq 4$

よって $t$ を戻して　$-1\leqq \log_{\frac{1}{2}} x\leqq 4$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\leqq \log_{\frac{1}{2}} x\leqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

より　$\log_{\frac{1}{2}}(2^{-1})^{-1}\leqq \log_{\frac{1}{2}} x\leqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

から　$\log_{\frac{1}{2}} 2\leqq \log_{\frac{1}{2}} x\leqq \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{16}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$2\geqq x\geqq \dfrac{1}{16}$　つまり

$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 2$　……②

①，② から共通範囲より，解は　$\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 2$