数学演習（対数関数）Ｈ２１．１０．７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１． 次の値を求めよ。

(1) $\log_3 243$　(2) $\log_{10}\dfrac{1}{1000}$　(3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}$　(4) $\log_{0.2}25$

２． 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_4 8+\log_4 2$　(2) $\log_5 75-\log_5 15$　(3) $\log_8 64^3$

(4) $\log_3\sqrt[4]{3^5}$　(5) $\log_{\sqrt{3}}27$　(6) $\log_2 8+\log_3\dfrac{1}{81}$

３． 次の式を簡単にせよ。

(1) $4\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(2) $\log_2 16+\log_4 8+\log_8 4$

(3) $(\log_3 4+\log_9 4)(\log_2 27-\log_4 9)$　(4) $3^{2\log_3 2}$

４． 次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $1,\ \log_2 5,\ \log_4 3$　(2) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}9$

５． 次の関数のグラフをかけ。　$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

６. 次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_4(x-1)=-1$　(2) $\log_{\frac{1}{3}}x>2$

(3) $\log_3(x+2)+\log_3(x-1)=\log_3 4$　(4) $\log_2 x+\log_2(x+1)<1$

７. 次の方程式と不等式を解け。　$(\log_4 x)^2 \leqq \log_2 x+3$

８. x の関数 $y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\log_3 x=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。

(2) $\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq 1$ のとき，y の最大値と最小値を求めよ。

９. $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき

(1) 2^{50} は何桁の整数であるかを調べよ。

(2) $\left(\dfrac{1}{18}\right)^{20}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。

数学演習（対数関数）Ｈ２１．１０．７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．次の値を求めよ。

(1) $\log_3 243$　　(2) $\log_{10}\dfrac{1}{1000}$　　(3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}$　　(4) $\log_{0.2}25$

解答 (1) 5　(2) -3　(3) $-\dfrac{3}{2}$　(4) -2

(1) $243=3^5$ であるから　$\log_3 243=\log_3 3^5=5$

(2) $\log_{10}\dfrac{1}{1000}=\log_{10}\dfrac{1}{10^3}=\log_{10}10^{-3}=-3$

(3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}=\log_{\frac{1}{3}}3^{\frac{3}{2}}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{3}{2}$

(4) $x=\log_{0.2}25$ とおくと　$0.2^x=25$

よって　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=5^2$　すなわち　$5^{-x}=5^2$

ゆえに　$x=-2$　すなわち　$\log_{0.2}25=-2$

2．次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_4 8+\log_4 2$　　(2) $\log_5 75-\log_5 15$　　(3) $\log_8 64^3$

(4) $\log_3\sqrt[4]{3^5}$　　(5) $\log_{\sqrt{3}}27$　　(6) $\log_2 8+\log_3\dfrac{1}{81}$

解答 (1) 2　(2) 1　(3) 6　(4) $\dfrac{5}{4}$　(5) 6　(6) -1

(1) $\log_4 8+\log_4 2=\log_4(8\times 2)=\log_4 16=\log_4 4^2=2$

(2) $\log_5 75-\log_5 15=\log_5\dfrac{75}{15}=\log_5 5=1$

(3) $\log_8 64^3=3\log_8 64=3\log_8 8^2=3\cdot 2=6$

(4) $\log_3\sqrt[4]{3^5}=\log_3 3^{\frac{5}{4}}=\dfrac{5}{4}\log_3 3=\dfrac{5}{4}$

(5) $\log_{\sqrt{3}}27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3\sqrt{3}}=\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$

(6) $\log_2 8=\log_2 2^3=3$，$\log_3\dfrac{1}{81}=\log_3 81^{-1}=-\log_3 81=-\log_3 3^4=-4$

したがって　$\log_2 8+\log_3\dfrac{1}{81}=3-4=-1$

3．次の式を簡単にせよ。

(1) $4\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(2) $\log_2 16+\log_4 8+\log_8 4$

(3) $(\log_3 4+\log_9 4)(\log_2 27-\log_4 9)$　　(4) $3^{2\log_3 2}$

解答 (1) 1　(2) $\dfrac{37}{6}$　(3) 6　(4) 4

(1) $4\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}=4\log_3 3^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\left(\log_3 2^{\frac{1}{2}}-\log_3 3\right)$

$=4\cdot\dfrac{1}{2}\log_3 3-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\left(\dfrac{1}{2}\log_3 2-1\right)$

$=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\log_3 2+2-1=1$

別解 $4\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\log_3(\sqrt{3})^4-\log_3 2^{\frac{1}{2}}+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$=\log_3 3^2-\log_3\sqrt{2}+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$=\log_3\left(9\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)=\log_3 3=1$

(2) $\log_2 16+\log_4 8+\log_8 4=\log_2 2^4+\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}+\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3}$

$=4+\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{37}{6}$

(3) $(\log_3 4+\log_9 4)(\log_2 27-\log_4 9)=\left(\log_3 2^2+\dfrac{\log_3 2^2}{\log_3 3^2}\right)\left(\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 2}-\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 2^2}\right)$

$=(2\log_3 2+\log_3 2)\left(\dfrac{3}{\log_3 2}-\dfrac{1}{\log_3 2}\right)$

$=3\log_3 2\cdot\dfrac{2}{\log_3 2}=6$

(4) $2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$ であるから　$3^{2\log_3 2}=3^{\log_3 4}=4$

4．次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) 1，$\log_2 5$，$\log_4 3$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$，$0$，$\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}9$

解答 (1) $\log_4 3<1<\log_2 5$　(2) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}9<0<\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$

(1) $1=\log_2 2$，　$\log_4 3=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 3=\log_2\sqrt{3}$

底 2 は 1 より大きく，$\sqrt{3}<2<5$ であるから

$\log_2\sqrt{3}<\log_2 2<\log_2 5$　すなわち　$\log_4 3<1<\log_2 5$

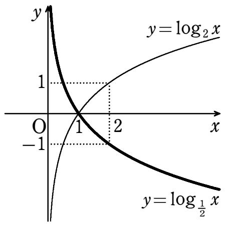
(2) $0=\log_{\frac{1}{3}}1$，$\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{9}=\log_{\frac{1}{3}}3$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さく，$\dfrac{1}{2}<1<3$ であるから

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}>\log_{\frac{1}{3}}1>\log_{\frac{1}{3}}3$　すなわち　$\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}9<0<\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$

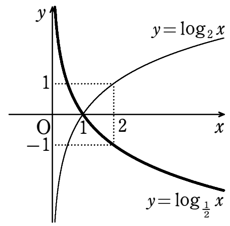
5．次の関数のグラフをかけ。　$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

解答 [図]



$y=\log_{\frac{1}{2}}x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2 x$

このグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフと x 軸に関して対称である。[図]



6. 次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_4(x-1)=-1$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}x>2$

(3) $\log_3(x+2)+\log_3(x-1)=\log_3 4$　　(4) $\log_2 x+\log_2(x+1)<1$

解答 (1) $x=\dfrac{5}{4}$　(2) $0<x<\dfrac{1}{9}$　(3) $x=2$　(4) $0<x<1$

(1) 真数は正であるから　$x-1>0$　ゆえに　$x>1$ …… ①

方程式を変形して　$\log_4(x-1)=\log_4 4^{-1}$

よって　$x-1=\dfrac{1}{4}$　すなわち　$x=\dfrac{5}{4}$　(① を満たす)

(2) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$　すなわち　$x<\dfrac{1}{9}$ …… ②

①, ② から，解は　$0<x<\dfrac{1}{9}$

(3) 真数は正であるから　$x+2>0$　かつ　$x-1>0$

共通範囲をとって　$x>1$ …… ①

方程式を変形して　$\log_3(x+2)(x-1)=\log_3 4$

ゆえに　$(x+2)(x-1)=4$　よって　$x^2+x-6=0$

したがって　$x=2,\ -3$　① を満たすのは　$x=2$

(4) 真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x+1>0$

共通範囲をとって　$x>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_2 x(x+1)<\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$x(x+1)<2$

ゆえに　$x^2+x-2<0$　よって　$(x-1)(x+2)<0$

したがって　$-2<x<1$ …… ②

①, ② から，解は　$0<x<1$

7. 次の方程式と不等式を解け。　$(\log_4 x)^2\leqq\log_2 x+3$

解答 $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 64$

$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 x$ であるから，不等式は

$\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)^2\leqq\log_2 x+3$　すなわち　$(\log_2 x)^2-4\log_2 x-12\leqq 0$

$\log_2 x=t$ とおくと　$t^2-4t-12\leqq 0$

ゆえに　$(t+2)(t-6)\leqq 0$　よって　$-2\leqq t\leqq 6$

すなわち　$-2\leqq\log_2 x\leqq 6$

したがって　$\log_2 2^{-2}\leqq\log_2 x\leqq\log_2 2^6$

底 2 は 1 より大きいから

$2^{-2}\leqq x\leqq 2^6$　すなわち　$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 64$

8. x の関数 $y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\log_3 x=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。

(2) $\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq 1$ のとき，y の最大値と最小値を求めよ。

解答 (1) $y=t^2+3t+2$　(2) $x=1$ のとき最大値 2，$x=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$

(1) $y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)=(\log_3 3+\log_3 x)(\log_3 9+\log_3 x)$

$=(1+\log_3 x)(2+\log_3 x)$

$\log_3 x=t$ とおくとき　$y=(1+t)(2+t)=t^2+3t+2$

(2) 底 3 は 1 より大きいから，

$\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq 1$ のとき　$\log_3\dfrac{1}{9}\leqq\log_3 x\leqq\log_3 1$

すなわち　$-2\leqq t\leqq 0$ …… ①

(1) の結果から

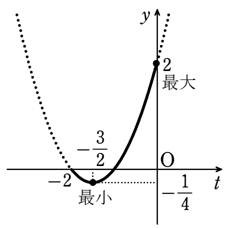
$y=t^2+3t+2=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

① の範囲において，y は

$t=0$　のとき最大値 2,

$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$

をとる。



$t=0$　のとき，$\log_3 x=0$　から　$x=1$

$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき，$\log_3 x=-\dfrac{3}{2}$ から　$x=3^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$x=1$ のとき最大値 2，$x=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$

9. $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき

(1) 2^{50} は何桁の整数であるかを調べよ。

(2) $\left(\dfrac{1}{18}\right)^{20}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。

解答 (1) 16 桁　(2) 小数第 26 位

(1) $\log_{10}2^{50}=50\log_{10}2=50\times 0.3010=15.05$

ゆえに　$15<\log_{10}2^{50}<16$

よって　$10^{15}<2^{50}<10^{16}$

したがって，2^{50} は 16 桁の数である。

(2) $\log_{10}\left(\dfrac{1}{18}\right)^{20}=20\log_{10}\dfrac{1}{2\cdot 3^2}=-20(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=-20(0.3010+2\times 0.4771)=-25.104$

ゆえに　$-26<\log_{10}\left(\dfrac{1}{18}\right)^{20}<-25$

よって　$10^{-26}<\left(\dfrac{1}{18}\right)^{20}<10^{-25}$

したがって，小数第 26 位に初めて 0 でない数が現れる。