数学演習（対数関数）Ｈ２２．９．２２　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の数は何桁の整数か。

(1)　2^{100}　　(2)　3^{40}　　(3)　6^{25}

2．次の数は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$　　(2)　0.2^{50}　　(3)　$\sqrt[3]{0.012^{10}}$

3．$\log_3 2=a$，$\log_5 4=b$ とするとき，$\log_{15}8$ を a，b を用いて表せ。

4．(1)　$\log_{10}x=a$，$\log_{10}y=b$，$\log_{10}z=c$ であるとき，$\log_{10}x^2y^3z$，$\log_{10}\sqrt{\dfrac{z}{xy}}$ を a，b，c を用いて表せ。

(2)　$\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{10}40$ を a で表せ。

5．次の各組の数の大小を比較せよ。

(1)　$\dfrac{1}{2}$，$\log_2 3$，$\log_{\frac{1}{2}}7$　　(2)　$\log_2 3$，$\log_3 2$，$\log_4 8$

6．x の関数 $y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$\log_3 x=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。

(2)　$\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq 1$ のとき，y の最大値と最小値を求めよ。

7．次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=2(\log_4 x)^2-\dfrac{1}{2}\log_2 x$

(2)　$y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)\left(\log_4\dfrac{x}{2}\right)$　$(1\leqq x\leqq 4)$

8．次の不等式を解け。

(1)　$\log_2 x+\log_2(x-1)<0$

(2)　$2\log_3 x>\log_3(2x+3)$

(3)　$\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)\geqq\log_{\frac{1}{9}}(-x+2)$

9．次の方程式を解け。

(1)　$2^x=3^{x-1}$

(2)　$(\log_2 x)^2-5\log_4 x+1=0$

(3)　$\log_2 x-6\log_x 2=1$

10．次の方程式を解け。

(1)　$\log_x 125=3$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-3x)=-1$

(3)　$\log_5(2x-1)+\log_5(x-2)=1$

(4)　$\log_3(x^2+6x+5)-\log_3(x+3)=1$

数学演習（対数関数）Ｈ２２．９．２２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の数は何桁の整数か。

(1)　2^{100}　　(2)　3^{40}　　(3)　6^{25}

解答　(1)　31 桁　　(2)　20 桁　　(3)　20 桁

解説

(1)　$\log_{10}2^{100}=100\log_{10}2=100\times0.3010=30.10$

ゆえに　$30<\log_{10}2^{100}<31$

すなわち　$\log_{10}10^{30}<\log_{10}2^{100}<\log_{10}10^{31}$

よって　$10^{30}<2^{100}<10^{31}$

したがって，2^{100} は 31 桁の数である。

(2)　$\log_{10}3^{40}=40\log_{10}3=40\times0.4771=19.084$

ゆえに　$19<\log_{10}3^{40}<20$

すなわち　$\log_{10}10^{19}<\log_{10}3^{40}<\log_{10}10^{20}$

よって　$10^{19}<3^{40}<10^{20}$

したがって，3^{40} は 20 桁の数である。

(3)　$\log_{10}6^{25}=25(\log_{10}2+\log_{10}3)=25(0.3010+0.4771)=19.4525$

ゆえに　$19<\log_{10}6^{25}<20$

すなわち　$\log_{10}10^{19}<\log_{10}6^{25}<\log_{10}10^{20}$

よって　$10^{19}<6^{25}<10^{20}$

したがって，6^{25} は 20 桁の数である。

2．次の数は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$　　(2)　0.2^{50}　　(3)　$\sqrt[3]{0.012^{10}}$

解答　(1)　小数第 48 位　　(2)　小数第 35 位　　(3)　小数第 7 位

解説

(1)　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}=-100\log_{10}3=-100\times0.4771=-47.71$

ゆえに　$-48<\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}<-47$

すなわち　$\log_{10}10^{-48}<\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}<\log_{10}10^{-47}$

よって　$10^{-48}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}<10^{-47}$

したがって，小数第 48 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(2)　$\log_{10}0.2^{50}=\log_{10}\left(\dfrac{2}{10}\right)^{50}=50(\log_{10}2-1)=50(0.3010-1)=-34.95$

ゆえに　$-35<\log_{10}0.2^{50}<-34$

すなわち　$\log_{10}10^{-35}<\log_{10}0.2^{50}<\log_{10}10^{-34}$

よって　$10^{-35}<0.2^{50}<10^{-34}$

したがって，小数第 35 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(3)　$\log_{10}\sqrt[3]{0.012^{10}}=\dfrac{10}{3}\log_{10}(2^2\times3\times10^{-3})$

$=\dfrac{10}{3}(2\log_{10}2+\log_{10}3-3\log_{10}10)$

$=\dfrac{10}{3}(2\times0.3010+0.4771-3)=-6.403$

ゆえに　$-7<\log_{10}\sqrt[3]{0.012^{10}}<-6$

すなわち　$\log_{10}10^{-7}<\log_{10}\sqrt[3]{0.012^{10}}<\log_{10}10^{-6}$

よって　$10^{-7}<\sqrt[3]{0.012^{10}}<10^{-6}$

したがって，小数第 7 位に初めて 0 でない数字が現れる。

3．$\log_3 2=a$，$\log_5 4=b$ とするとき，$\log_{15}8$ を a，b を用いて表せ。

解答　$\dfrac{3ab}{2a+b}$

解説

底をすべて 3 にそろえるために，b に底の交換法則を用いると

$b=\dfrac{\log_3 4}{\log_3 5}=\dfrac{2\log_3 2}{\log_3 5}=\dfrac{2a}{\log_3 5}$

ゆえに　$b=\dfrac{2a}{\log_3 5}$　より　$b\log_3 5=2a$　より　$\log_3 5=\dfrac{2a}{b}$

よって　$\log_{15}8=\dfrac{\log_3 8}{\log_3 15}=\dfrac{\log_3 2^3}{\log_3(3\times5)}=\dfrac{3\log_3 2}{\log_3 3+\log_3 5}$

$=\dfrac{3a}{1+\dfrac{2a}{b}}$

$=\dfrac{3a}{\dfrac{b+2a}{b}}$

$=3a\div\dfrac{b+2a}{b}=\dfrac{3ab}{2a+b}$

4．(1)　$\log_{10}x=a$，$\log_{10}y=b$，$\log_{10}z=c$ であるとき，$\log_{10}x^2y^3z$，$\log_{10}\sqrt{\dfrac{z}{xy}}$ を a，b，c を用いて表せ。

(2)　$\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{10}40$ を a で表せ。

解答　(1)　順に　$2a+3b+c$，$\dfrac{1}{2}(c-a-b)$　　(2)　$\dfrac{3a+1}{a+1}$

解説

(1)　$\log_{10}x^2y^3z=\log_{10}x^2+\log_{10}y^3+\log_{10}z$

$=2\log_{10}x+3\log_{10}y+\log_{10}z$

$=2a+3b+c$

$\log_{10}\sqrt{\dfrac{z}{xy}}=\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{z}{xy}=\dfrac{1}{2}\{\log_{10}z-(\log_{10}x+\log_{10}y)\}$

$=\dfrac{1}{2}(c-a-b)$

(2)　$\log_{10}40=\dfrac{\log_5 40}{\log_5 10}=\dfrac{\log_5(2^3\times5)}{\log_5(2\times5)}=\dfrac{3\log_5 2+1}{\log_5 2+1}=\dfrac{3a+1}{a+1}$

5．次の各組の数の大小を比較せよ。

(1)　$\dfrac{1}{2}$，$\log_2 3$，$\log_{\frac{1}{2}}7$　　(2)　$\log_2 3$，$\log_3 2$，$\log_4 8$

解答　(1)　$\log_{\frac{1}{2}}7<\dfrac{1}{2}<\log_2 3$　　(2)　$\log_3 2<\log_4 8<\log_2 3$

解説

(1)　すべて底が 2 の対数にそろえる

$\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{2}$，$\log_{\frac{1}{2}}7=\dfrac{\log_2 7}{\log_2\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\log_2 7}{-1}=-\log_2 7=\log_2\dfrac{1}{7}$

底 2 は 1 より大きく，$\dfrac{1}{7}<\sqrt{2}<3$ であるから

$\log_2\dfrac{1}{7}<\log_2\sqrt{2}<\log_2 3$

したがって　$\log_{\frac{1}{2}}7<\dfrac{1}{2}<\log_2 3$

(2)　すべて底が 2 の対数にそろえる

$\log_3 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}=\dfrac{1}{\log_2 3}$，$\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3}{2}$

$\log_2 2<\log_2 3$ より，$1<\log_2 3$ であるから　$\dfrac{1}{\log_2 3}<1$

よって，$\log_3 2$　は 1 より小さい数である。

ここで，$\log_2 3$ も $\dfrac{3}{2}$ も 1 より大きいので，$\log_3 2$ は 3 つの数の中で一番小さい

また　$\log_2 3$ と $\dfrac{3}{2}$ の大小を比べるために差をとると

$\log_2 3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(2\log_2 3-3)=\dfrac{1}{2}(\log_2 3^2-\log_2 2^3)$

$=\dfrac{1}{2}(\log_2 9-\log_2 8)>0$

ゆえに　$\log_2 3>\dfrac{3}{2}$　すなわち　$\log_2 3>\log_4 8$

したがって　$\log_3 2<\log_4 8<\log_2 3$

6．x の関数 $y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$\log_3 x=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。

(2)　$\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq1$ のとき，y の最大値と最小値を求めよ。

解答　(1)　$y=t^2+3t+2$　　(2)　$x=1$ のとき最大値 2，$x=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)=(\log_3 3+\log_3 x)(\log_3 9+\log_3 x)$

$=(1+\log_3 x)(2+\log_3 x)$

$\log_3 x=t$ とおくとき　$y=(1+t)(2+t)=t^2+3t+2$

(2)　底 3 は 1 より大きいから，

$\dfrac{1}{9}\leqq x\leqq1$ のとき　$\log_3\dfrac{1}{9}\leqq\log_3 x\leqq\log_3 1$

すなわち　$-2\leqq t\leqq 0$　……①

(1) の結果から

$$y=t^2+3t+2=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

① の範囲において，y は

$t=0$　のとき最大値 2,

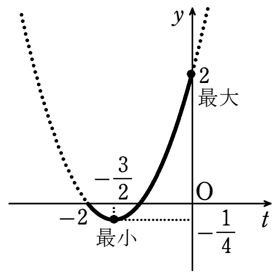
$t=-\frac{3}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

をとる。

$t=0$　のとき，$\log_3 x=0$　から　$x=1$

$t=-\frac{3}{2}$ のとき，$\log_3 x=-\frac{3}{2}$ から　$x=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$x=1$ のとき最大値 2，$x=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$



7．次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=2(\log_4 x)^2-\frac{1}{2}\log_2 x$　　(2)　$y=\left(\log_2\frac{x}{4}\right)\left(\log_4\frac{x}{2}\right)$　$(1\leqq x\leqq 4)$

解答　(1)　$x=\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$，最大値はない

(2)　$x=1$ のとき最大値 1，$x=2\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$

解説

(1)　$\log_2 x=t$ とおくと，$x>0$ のとき，t はすべての実数値をとりうる。

y を t の式で表すと　$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{t}{2}$　より

$$y=2\left(\frac{t}{2}\right)^2-\frac{1}{2}t$$
$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t$$
$$=\frac{1}{2}(t^2-t)=\frac{1}{2}\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$$

ゆえに，y は $t=\frac{1}{2}$ のとき最小となる。

$t=\frac{1}{2}$　すなわち $\log_2 x=\frac{1}{2}$ のとき　$x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

よって，y は $x=\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$ をとり，最大値はない。

(2)　$\log_2\frac{x}{4}=\log_2 x-\log_2 4=\log_2 x-2$,

$$\log_4\frac{x}{2}=\frac{\log_2\frac{x}{2}}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x-\log_2 2}{2}=\frac{1}{2}(\log_2 x-1)$$

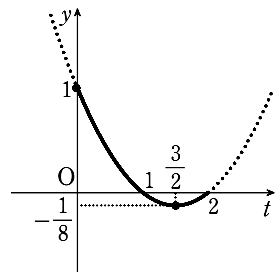
であるから　$y=\frac{1}{2}(\log_2 x-2)(\log_2 x-1)$

$\log_2 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 4$ から　$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 4$

すなわち　$0\leqq t\leqq 2$　……①

y を t の式で表すと

$$y=\frac{1}{2}(t-2)(t-1)$$
$$=\frac{1}{2}(t^2-3t+2)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+1$$
$$=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$$



① の範囲において，y は

$t=0$ のとき最大値 1，$t=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる。

$t=0$　のとき，$\log_2 x=0$ から　$x=1$

$t=\frac{3}{2}$ のとき，$\log_2 x=\frac{3}{2}$ から　$x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

よって，y は，$x=1$ のとき最大値 1，$x=2\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる。

8．次の不等式を解け。

(1)　$\log_2 x+\log_2(x-1)<0$　　(2)　$2\log_3 x>\log_3(2x+3)$

(3)　$\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)\geqq\log_{\frac{1}{9}}(-x+2)$

解答　(1)　$1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　(2)　$x>3$　　(3)　$\frac{2}{3}<x\leqq 1$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-1>0$

共通範囲をとって　$x>1$　……①

不等式を変形して　$\log_2 x(x-1)<\log_2 1$

底 2 は 1 より大きいから　$x(x-1)<1$

整理すると　$x^2-x-1<0$　……②

$x^2-x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，不等式 ② の解は　$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　……③

①，③ から，解は　$1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$2x+3>0$

共通範囲をとって　$x>0$　……①

不等式を変形して　$\log_3 x^2>\log_3(2x+3)$

底 3 は 1 より大きいから　$x^2>2x+3$

ゆえに　$x^2-2x-3>0$　　よって　$(x+1)(x-3)>0$

したがって　$x<-1,\ 3<x$　……②

①，② から，解は　$x>3$

(3)　真数は正であるから　$3x-2>0$　かつ　$-x+2>0$

共通範囲をとって　$\frac{2}{3}<x<2$　……①

$\log_{\frac{1}{9}}(-x+2)=\frac{\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)$ であるから

不等式は　$2\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)\geqq\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)^2\geqq\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから不等号の向きがかわる

$$(3x-2)^2\leqq(-x+2)$$

ゆえに　$9x^2-11x+2\leqq 0$　　よって　$(x-1)(9x-2)\leqq 0$

したがって　$\frac{2}{9}\leqq x\leqq 1$　……②

①，② から，解は　$\frac{2}{3}<x\leqq 1$

9．次の方程式を解け。

(1)　$2^x=3^{x-1}$　　(2)　$(\log_2 x)^2-5\log_4 x+1=0$

(3)　$\log_2 x-6\log_x 2=1$

解答　(1)　$x=\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}$　$\left(\text{または}\ x=\frac{1}{1-\log_3 2}\right)$　　(2)　$x=4,\ \sqrt{2}$

(3)　$x=\frac{1}{4}$，8

解説

(1)　$2^x>0,\ 3^{x-1}>0$ であるから，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 2^x=\log_2 3^{x-1}$　すなわち　$x=(x-1)\log_2 3$

ここで，$a=\log_2 3$ とおくと　$x=(x-1)a$

よって　$x=ax-a$

この式をxについて解くと　$x-ax=-a$　より　$x(1-a)=-a$

ここで，$a=\log_2 3$ は 1 ではないので　$1-a\neq 0$より両辺を$1-a$で割って

$$x=\frac{-a}{1-a}=\frac{a}{a-1}$$

したがってaを戻して　$x=\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}$

参考　与式の両辺の 3 を底とする対数をとると，解は $x=\frac{1}{1-\log_3 2}$ となる。

(2)　真数は正であるから　$x>0$　……①

$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2}$ であるから，方程式は

$(\log_2 x)^2-\frac{5}{2}\log_2 x+1=0$　すなわち　$2(\log_2 x)^2-5\log_2 x+2=0$

したがって　$(\log_2 x-2)(2\log_2 x-1)=0$

ゆえに　$\log_2 x=2,\ \frac{1}{2}$　　よって　$x=2^2,\ 2^{\frac{1}{2}}$

すなわち　$x=4,\ \sqrt{2}$　(① を満たす)

(3)　対数の真数，底の条件から　$x>0,\ x\neq 1$

不等式を変形して　$\log_2 x-\frac{6}{\log_2 x}=1$　……①

① の両辺に $\log_2 x$ を掛けて　$(\log_2 x)^2-6=\log_2 x$

ゆえに　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-6=0$

よって　$(\log_2 x+2)(\log_2 x-3)=0$

ゆえに　$\log_2 x=-2,3$

解いて　$x=2^{-2},2^3$　より　$x=\frac{1}{4},8$　これは$x>0,\ x\neq 1$を満たす。

10. 次の方程式を解け。

(1) $\log_x 125=3$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-3x)=-1$

(3) $\log_5(2x-1)+\log_5(x-2)=1$　　(4) $\log_3(x^2+6x+5)-\log_3(x+3)=1$

解答　(1) $x=5$　(2) $x=2,\ -\frac{1}{2}$　(3) $x=3$　(4) $x=1$

解説

(1) 底の条件から　$x>0,\ x\neq 1$ ……①

対数の定義から　$\log_x 125=3$ より　$x^3=125$

したがって　$x=5$　(① を満たす)

(2) 真数は正であるから　$2x^2-3x>0$

ゆえに　$x(2x-3)>0$　よって　$x<0,\ \frac{3}{2}<x$ ……①

対数の定義から　$2x^2-3x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$　すなわち　$2x^2-3x=2$

ゆえに　$2x^2-3x-2=0$　よって　$(x-2)(2x+1)=0$

したがって　$x=2,\ -\frac{1}{2}$　(① を満たす)

(3) 真数は正であるから　$2x-1>0$　かつ　$x-2>0$

共通範囲をとって　$x>2$ ……①

方程式を変形して　$\log_5(2x-1)(x-2)=1$

対数の定義から　$(2x-1)(x-2)=5^1$

ゆえに　$2x^2-5x-3=0$　よって　$(x-3)(2x+1)=0$

したがって　$x=3,\ -\frac{1}{2}$　① を満たすのは　$x=3$

(4) 真数は正であるから　$x^2+6x+5>0$　かつ　$x+3>0$

$x^2+6x+5>0$ から　$(x+1)(x+5)>0$

ゆえに　$x<-5,\ -1<x$

$x+3>0$ から　$x>-3$

共通範囲をとって　$x>-1$ …… ①

方程式から　$\log_3(x^2+6x+5)=1+\log_3(x+3)$

ゆえに　$\log_3(x^2+6x+5)=\log_3 3(x+3)$

よって　$x^2+6x+5=3(x+3)$

整理して　$x^2+3x-4=0$

ゆえに　$(x-1)(x+4)=0$　よって　$x=1,\ -4$

① を満たすのは　$x=1$