数学演習（対数関数）Ｈ２２．９．１７　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の値を求めよ。

(1) $\log_4 16$　(2) $\log_3 81$　(3) $\log_5 5$　(4) $\log_7 1$

(5) $\log_3 \frac{1}{9}$　(6) $\log_{\frac{1}{5}} 25$　(7) $\log_{0.5} \sqrt{8}$　(8) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2．次の計算をせよ。

(1) $\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 12$　(2) $\log_3 7 - \log_3 21$

(3) $\log_{10} 4 + \log_{10} 200 - 3\log_{10} 2$　(4) $2\log_3 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_3 6 + \log_3 \frac{\sqrt{6}}{3}$

3．次の計算をせよ。

(1) $\log_5 10 - \log_5 2\sqrt{5}$　(2) $\log_{10} 5\sqrt{5} + \frac{1}{2}\log_{10} \frac{4}{5}$

(3) $\log_{\sqrt{5}} 125$　(4) $\log_5 9 \cdot \log_9 25$

4．次の計算をせよ。

(1) $\log_7 \sqrt{9+\sqrt{32}} + \log_7 \sqrt{9-\sqrt{32}}$　(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 4$

(3) $(\log_4 9 - \log_{16} 3)(\log_3 \sqrt{2} - \log_9 \sqrt[3]{4})$

5．$\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ とおくとき，次の値を a，b で表せ。

(1) $\log_{10} \frac{1}{12}$　(2) $\log_{10} 15$　(3) $\log_{10} \sqrt{0.75}$

(4) $\log_2 27$　(5) $\log_{18} \sqrt[3]{24}$

6．次の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10} 3}$　(2) $3^{-2\log_3 4}$　(3) $16^{\log_2 10}$

7．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\log_5 x=2$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} x=-2$　　(3)　$\log_2 x=\frac{1}{2}$

(4)　$\log_4 x<2$　　(5)　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　　(6)　$\log_{\frac{1}{6}} x<-2$

8．次の数の大小関係を調べよ。

(1)　$\log_{0.8}5$，$\log_2 5$，$\log_3 5$　　(2)　$3\log_4 3$，$2\log_2 3$，3

9．次の最大値または最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　関数 $y=\log_2(-x^2+3x-2)$ の最大値

(2)　関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-x^2)$ の最小値

(3)　関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)$ の最小値

10．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=(\log_3 x)^2-6\log_3 x+8$ $(1\leqq x\leqq 27)$

(2)　$y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4$ $(1\leqq x\leqq 32)$

11．次の方程式を解け。

(1)　$\log_4(x+3)=\log_4(2x+2)$　　(2)　$\log_2(x^2+x-2)=2$

(3)　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(4)　$(\log_3 x)^2=\log_3 x^2+3$

数学演習（対数関数）Ｈ２２．９．１７　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の値を求めよ。

(1) $\log_4 16$　(2) $\log_3 81$　(3) $\log_5 5$　(4) $\log_7 1$

(5) $\log_3\dfrac{1}{9}$　(6) $\log_{\frac{1}{5}} 25$　(7) $\log_{0.5}\sqrt{8}$　(8) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}$

解答　(1) 2　(2) 4　(3) 1　(4) 0　(5) -2　(6) -2　(7) $-\dfrac{3}{2}$　(8) -6

解説

(1) $\log_4 16=\log_4 4^2=2$

(2) $\log_3 81=\log_3 3^4=4$

(3) $\log_5 5=\log_5 5^1=1$

(4) $\log_7 1=\log_7 7^0=0$

(5) $p=\log_3\dfrac{1}{9}$ とおくと　$3^p=\dfrac{1}{9}$　ゆえに　$3^p=3^{-2}$

よって　$p=-2$

別解　$\log_3\dfrac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

(6) $p=\log_{\frac{1}{5}} 25$ とおくと　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^p=25$

ゆえに　$5^{-p}=5^2$　よって　$-p=2$

すなわち　$p=-2$

別解　$\log_{\frac{1}{5}} 25=\dfrac{\log_5 25}{\log_5\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\log_5 5^2}{\log_5 5^{-1}}=-2$

(7) $p=\log_{0.5}\sqrt{8}$ とおくと　$(0.5)^p=\sqrt{8}$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^p=2^{\frac{3}{2}}$　よって　$2^{-p}=2^{\frac{3}{2}}$

したがって，$-p=\dfrac{3}{2}$ から　$p=-\dfrac{3}{2}$

別解　$\log_{0.5}\sqrt{8}=\dfrac{\log_2\sqrt{8}}{\log_2 0.5}=\dfrac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^{-1}}=-\dfrac{3}{2}$

(8) $p=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}$ とおくと　$(\sqrt{3})^p=\dfrac{1}{27}$

ゆえに　$3^{\frac{p}{2}}=3^{-3}$　よって　$\dfrac{p}{2}=-3$

したがって　$p=-6$

別解　$\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}=\dfrac{\log_3\dfrac{1}{27}}{\log_3\sqrt{3}}=\dfrac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}=-6$

2．次の計算をせよ。

(1) $\log_2\dfrac{4}{3}+\log_2 12$　(2) $\log_3 7-\log_3 21$

(3) $\log_{10}4+\log_{10}200-3\log_{10}2$　(4) $2\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6+\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解答　(1) 4　(2) -1　(3) 2　(4) 0

解説

(1) (与式)$=\log_2\left(\dfrac{4}{3}\times 12\right)=\log_2 16=4$

(2) (与式)$=\log_3\dfrac{7}{21}=\log_3\dfrac{1}{3}=-1$

(3) (与式)$=\log_{10}\dfrac{4\times 200}{2^3}=\log_{10}100=2$

(4) (与式)$=\log_3(\sqrt{3})^2-\log_3 6^{\frac{1}{2}}+\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\log_3\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\log_3 1=0$

3．次の計算をせよ。

(1) $\log_5 10-\log_5 2\sqrt{5}$　(2) $\log_{10}5\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{4}{5}$

(3) $\log_{\sqrt{5}}125$　(4) $\log_5 9\cdot\log_9 25$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 1　(3) 6　(4) 2

解説

(1) (与式)$=\log_5\dfrac{10}{2\sqrt{5}}=\log_5\sqrt{5}=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(2) (与式)$=\log_{10}\left\{5\sqrt{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\log_{10}\left(5\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\log_{10}10=1$

(3) (与式)$=\dfrac{\log_5 125}{\log_5\sqrt{5}}=\dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 5^{\frac{1}{2}}}=6$

別解　(与式)$=\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^6=6$

(4) (与式)$=\log_5 9\cdot\dfrac{\log_5 25}{\log_5 9}=\log_5 25=2$

4．次の計算をせよ。

(1) $\log_7\sqrt{9+\sqrt{32}}+\log_7\sqrt{9-\sqrt{32}}$　(2) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 4$

(3) $(\log_4 9-\log_{16}3)(\log_3\sqrt{2}-\log_9\sqrt[3]{4})$

解答　(1) 1　(2) 2　(3) $\dfrac{1}{8}$

解説

(1) (与式)$=\log_7(\sqrt{9+\sqrt{32}}\sqrt{9-\sqrt{32}})=\log_7\sqrt{9^2-(\sqrt{32})^2}$

$=\log_7\sqrt{49}=\log_7 7=1$

(2) (与式)$=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 5}=\log_2 4=2$

(3) (与式)$=\left(\dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}-\dfrac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)\left(\dfrac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2 3}-\dfrac{\log_2\sqrt[3]{4}}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 4}-\dfrac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)\left(\dfrac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 3}-\dfrac{\log_2 4^{\frac{1}{3}}}{\log_2 3^2}\right)$

$=\left(\dfrac{2\log_2 3}{\log_2 4}-\dfrac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}-\dfrac{\log_2 2^{\frac{2}{3}}}{2\log_2 3}\right)$

$=\left(\dfrac{2\log_2 3}{2}-\dfrac{\log_2 3}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}-\dfrac{\frac{2}{3}}{2\log_2 3}\right)$

$=\left(\dfrac{2a}{2}-\dfrac{a}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a}-\dfrac{\frac{2}{3}}{2a}\right)$

$=\left(a-\dfrac{a}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2a}-\dfrac{2}{6a}\right)$

$=\left(a-\dfrac{a}{4}\right)\left(\dfrac{3}{6a}-\dfrac{2}{6a}\right)$

$=\dfrac{3a}{4}\cdot\dfrac{1}{6a}$

$=\dfrac{1}{8}$

5．$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とおくとき，次の値を a，b で表せ。

(1) $\log_{10}\dfrac{1}{12}$　(2) $\log_{10}15$　(3) $\log_{10}\sqrt{0.75}$

(4) $\log_2 27$　(5) $\log_{18}\sqrt[3]{24}$

解答　(1) $-2a-b$　(2) $1-a+b$　(3) $\dfrac{b}{2}-a$　(4) $\dfrac{3b}{a}$　(5) $\dfrac{3a+b}{3a+6b}$

解説

(1) $\log_{10}\dfrac{1}{12}=-\log_{10}(2^2\times 3)=-\log_{10}2^2-\log_{10}3$

$=-2\log_{10}2-\log_{10}3=-2a-b$

(2) $\log_{10}15=\log_{10}(5\times 3)=\log_{10}5+\log_{10}3=\log_{10}\dfrac{10}{2}+\log_{10}3$

$=\log_{10}10-\log_{10}2+\log_{10}3=1-a+b$

(3) $\log_{10}\sqrt{0.75}=\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}(\log_{10}3-\log_{10}2^2)$

$=\dfrac{1}{2}(\log_{10}3-2\log_{10}2)=\dfrac{1}{2}(b-2a)=\dfrac{b}{2}-a$

(4) $\log_2 27=\dfrac{\log_{10}27}{\log_{10}2}=\dfrac{\log_{10}3^3}{\log_{10}2}=\dfrac{3\log_{10}3}{\log_{10}2}=\dfrac{3b}{a}$

(5) $\log_{18}\sqrt[3]{24}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\log_{10}24}{\log_{10}18}=\dfrac{\log_{10}(2^3\times 3)}{3\log_{10}(2\times 3^2)}$

$=\dfrac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{3(\log_{10}2+2\log_{10}3)}=\dfrac{3a+b}{3a+6b}$

6．次の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10}3}$　(2) $3^{-2\log_3 4}$　(3) $16^{\log_2 10}$

解答　(1) 3　(2) $\dfrac{1}{16}$　(3) 10000

解説

(1) $x=10^{\log_{10}3}$ とおいて，両辺の 10 を底とする対数をとると

$\log_{10}x=\log_{10}3\cdot\log_{10}10$　すなわち　$\log_{10}x=\log_{10}3$

よって　$x=3$

(2) $x=3^{-2\log_3 4}$ とおいて，両辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 x=-2\log_3 4\cdot\log_3 3$　すなわち　$\log_3 x=\log_3 4^{-2}$

よって　$x=\dfrac{1}{16}$

(3) $x=16^{\log_2 10}$ とおいて，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 x=\log_2 10\cdot\log_2 16$　すなわち　$\log_2 x=4\log_2 10$

ゆえに　$\log_2 x=\log_2 10^4$　よって　$x=10000$

7．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\log_5 x=2$　　(2)　$\log_{\frac{1}{3}} x=-2$　　(3)　$\log_2 x=\frac{1}{2}$

(4)　$\log_4 x<2$　　(5)　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　　(6)　$\log_{\frac{1}{6}} x<-2$

解答　(1)　$x=25$　　(2)　$x=9$　　(3)　$x=\sqrt{2}$　　(4)　$0<x<16$　　(5)　$0<x\leqq\frac{1}{8}$

(6)　$x>36$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$x=5^2$

すなわち　$x=25$

これは①を満たす。

(2)　真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

すなわち　$x=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$

これは①を満たす。

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$x=2^{\frac{1}{2}}$

すなわち　$x=\sqrt{2}$

これは①を満たす。

(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_4 x<\log_4 4^2$

すなわち　$\log_4 x<\log_4 16$

底 4 は 1 より大きいから　$x<16$　……②

①，② から，解は　$0<x<16$

(5)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq\frac{1}{8}$　……②

①，② から，解は　$0<x\leqq\frac{1}{8}$

(6)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}} 36$

底 $\frac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$x>36$

これは ① を満たすから，解である。

8．次の数の大小関係を調べよ。

(1)　$\log_{0.8}5$，$\log_2 5$，$\log_3 5$　　(2)　$3\log_4 3$，$2\log_2 3$，3

解答　(1)　$\log_{0.8}5<\log_3 5<\log_2 5$　　(2)　$3\log_4 3<3<2\log_2 3$

解説

(1)　$\log_{0.8}5=\frac{1}{\log_5 0.8}$，$\log_2 5=\frac{1}{\log_5 2}$，$\log_3 5=\frac{1}{\log_5 3}$

$\log_5 0.8<0<\log_5 2<\log_5 3$ であるから

$$\frac{1}{\log_5 0.8}<0<\frac{1}{\log_5 3}<\frac{1}{\log_5 2}$$

よって　$\log_{0.8}5<\log_3 5<\log_2 5$

(2)　$3\log_4 3=3\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}=\frac{3}{2}\log_2 3=\log_2 3^{\frac{3}{2}}$，$2\log_2 3=\log_2 3^2$，$3=\log_2 2^3$

底 2 は 1 より大きく，$3^{\frac{3}{2}}<2^3<3^2$ であるから

$$\log_2 3^{\frac{3}{2}}<\log_2 2^3<\log_2 3^2$$

すなわち　$3\log_4 3<3<2\log_2 3$

9．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=(\log_3 x)^2-6\log_3 x+8$　$(1\leqq x\leqq 27)$

(2)　$y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4$　$(1\leqq x\leqq 32)$

解答　(1)　$x=1$ のとき最大値 8，$x=27$ のとき最小値 -1

(2)　$x=4$ のとき最大値 4，$x=32$ のとき最小値 -5

解説

(1)　$\log_3 x=t$ とおく。

$1\leqq x\leqq 27$ であるから　$\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 27$

すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　……①

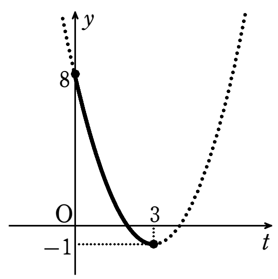
y を t の式で表すと　$y=t^2-6t+8=(t-3)^2-1$

① の範囲において，y は

$t=0$ のとき最大値 8，

$t=3$ のとき最小値 -1

をとる。



$t=0$ となるのは，$\log_3 x=0$ から　$x=1$

$t=3$ となるのは，$\log_3 x=3$ から　$x=27$

のときである。

したがって，y は，$x=1$ のとき最大値 8，$x=27$ のとき最小値 -1 をとる。

(2)　$y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x$

$\log_2 x=t$ とおく。

$1\leqq x\leqq 32$ であるから　$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 32$

すなわち　$0\leqq t\leqq 5$　……①

y を t の式で表すと

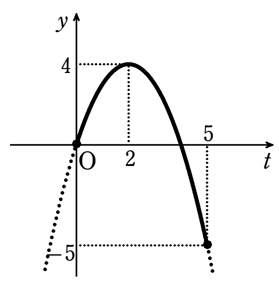
$$y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$$

① の範囲において，y は

$t=2$ のとき最大値 4，

$t=5$ のとき最小値 -5

をとる。



$t=2$ となるのは，$\log_2 x=2$ から　$x=4$

$t=5$ となるのは，$\log_2 x=5$ から　$x=32$

のときである。

したがって，y は，$x=4$ のとき最大値 4，$x=32$ のとき最小値 -5 をとる。

10．次の方程式を解け。

(1)　$\log_4(x+3)=\log_4(2x+2)$　　(2)　$\log_2(x^2+x-2)=2$

(3)　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(4)　$(\log_3 x)^2=\log_3 x^2+3$

解答　(1)　$x=1$　　(2)　$x=2,\ -3$　　(3)　$x=1$　　(4)　$x=\frac{1}{3},\ 27$

解説

(1)　真数は正であるから　$x+3>0$ かつ $2x+2>0$

これを解いて　$x>-1$　……①

方程式から　$x+3=2x+2$

したがって　$x=1$

これは，① を満たすから，解である。

(2)　真数は正であるから　$x^2+x-2>0$

ゆえに　$(x+2)(x-1)>0$

よって　$x<-2,\ 1<x$　……①

方程式から　$x^2+x-2=2^2$

整理して　$x^2+x-6=0$

ゆえに　$(x-2)(x+3)=0$

よって　$x=2,\ -3$

これは ① を満たすから，解である。

(3)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$

これを解いて　$x>0$　……①

方程式から　$\log_2 x(x+3)=\log_2 2^2$

ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理して　$x^2+3x-4=0$

よって　$(x-1)(x+4)=0$

したがって　$x=1,\ -4$

① を満たすのは　$x=1$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

ゆえに　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-3)=0$

よって　$\log_3 x=-1,\ 3$

したがって　$x=\frac{1}{3},\ 27$

これは①を満たす。