数学演習（対数の性質）Ｈ２７．９．２１

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 (1) 次の(ア)～(ウ)の対数の値を求めよ。また，(エ)の $\square$ をうめよ。

(ア) $\log_2 64$　(イ) $\log_{\frac{1}{2}} 8$　(ウ) $\log_{0.01} 10\sqrt{10}$　(エ) $\log_{\sqrt{3}} \square = -4$

(2) 次の式を簡単にせよ。

(ア) $\log_{0.2} 125$　(イ) $\log_6 12 + \log_6 3$　(ウ) $\log_3 18 - \log_3 2$

(エ) $6\log_2 \sqrt[3]{10} - 2\log_2 5$　(オ) $\frac{1}{2}\log_{10}\frac{5}{6} + \log_{10}\sqrt{7.5} + \frac{1}{2}\log_{10} 1.6$

2 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 27 \cdot \log_3 64 \cdot \log_{25}\sqrt{125} \cdot \log_{27} 81$　(2) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$

(3) $(\log_5 3 + \log_{25} 9)(\log_9 5 - \log_3 25)$

3 (1) $\log_2 3 = a$，$\log_3 5 = b$ のとき，$\log_2 10$ と $\log_{15} 40$ を a，b で表せ。

(2) $\log_x a = \frac{1}{3}$，$\log_x b = \frac{1}{8}$，$\log_x c = \frac{1}{24}$ のとき，$\log_{abc} x$ の値を求めよ。

(3) a，b，c を 1 でない正の数とし，$\log_a b = \alpha$，$\log_b c = \beta$，$\log_c a = \gamma$ とする。

このとき，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{4}$ (1) 次の値を求めよ。

(ア) $16^{\log_2 3}$　　　　(イ) $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\log_7 \frac{2}{3}}$

(2) $3^x = 5^y = \sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ (1) $\left(\log_3 \sqrt{\sqrt[3]{64}} + \log_9 \sqrt[3]{64}\right)\left(\log_2 \sqrt{81} + \log_4 \sqrt[4]{81}\right)$ を計算せよ。

(2) $\log_2 3 = a$，$\log_3 7 = b$ のとき，$\log_2 7$ を a，b で表すと $^{ア}\boxed{}$ である。したがって，$\log_{21} 56$，$\log_{\frac{2}{7}} \dfrac{49}{12}$ を a，b で表すと，それぞれ $^{イ}\boxed{}$，$^{ウ}\boxed{}$ である。

$\boxed{6}$ 0 でない実数 x，y，z，w と正の整数 a，b，c，d が，

$$a^x = b^y = c^z = d^w, \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{w}$$

を満たすものとする。ただし，$a > b > c > 1$，$d > 1$ とする。

(1) a，b，c を用いて d を表せ。

(2) $d \leqq 1000$ かつ $\sqrt{d}$ が整数であるような d を 1 つ求めよ。

1 (1) 次の(ア)～(ウ)の対数の値を求めよ。また，(エ)の $\boxed{}$ をうめよ。

(ア) $\log_2 64$　(イ) $\log_{\frac{1}{2}} 8$　(ウ) $\log_{0.01} 10\sqrt{10}$　(エ) $\log_{\sqrt{3}} \boxed{} = -4$

(2) 次の式を簡単にせよ。

(ア) $\log_{0.2} 125$　(イ) $\log_6 12 + \log_6 3$　(ウ) $\log_3 18 - \log_3 2$

(エ) $6\log_2 \sqrt[3]{10} - 2\log_2 5$　(オ) $\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{5}{6} + \log_{10}\sqrt{7.5} + \dfrac{1}{2}\log_{10} 1.6$

解答 (1) (ア) 6　(イ) -3　(ウ) $-\dfrac{3}{4}$　(エ) $\dfrac{1}{9}$

(2) (ア) -3　(イ) 2　(ウ) 2　(エ) 2　(オ) $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) (ア) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$

別解 $\log_2 64 = r$ とおくと　$2^r = 64 = 2^6$　よって　$r = 6$

(イ) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

別解 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = r$ とおくと　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^r = 8$　よって　$r = -3$

(ウ) $10\sqrt{10} = 10^{\frac{3}{2}} = (10^2)^{\frac{3}{4}} = 100^{\frac{3}{4}} = (0.01)^{-\frac{3}{4}}$

よって　$\log_{0.01} 10\sqrt{10} = -\dfrac{3}{4}$

別解 $\log_{0.01} 10\sqrt{10} = r$ とおくと　$(0.01)^r = 10\sqrt{10}$

よって　$10^{-2r} = 10^{\frac{3}{2}}$　ゆえに　$r = -\dfrac{3}{4}$

(エ) $\boxed{} = (\sqrt{3})^{-4} = \dfrac{1}{(\sqrt{3})^4} = \dfrac{1}{9}$

(2) (ア) $\log_{0.2} 125 = r$ とおくと，$(0.2)^r = 125$ から　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^r = 125$

ゆえに　$5^{-r} = 5^3$　$-r = 3$ から　$r = -3$

(イ) $\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 3) = \log_6 6^2 = 2$

(ウ) $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \dfrac{18}{2} = \log_3 3^2 = 2$

(エ) $6\log_2 \sqrt[3]{10} - 2\log_2 5 = \log_2 (\sqrt[3]{10})^6 - \log_2 5^2$

$= \log_2 \dfrac{10^2}{5^2} = \log_2 2^2 = 2$

別解 (与式) $= 6 \cdot \dfrac{1}{3}\log_2 10 - 2\log_2 5$

$= 2(\log_2 5 + \log_2 2) - 2\log_2 5 = 2$

(オ) $\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{5}{6} + \log_{10}\sqrt{7.5} + \dfrac{1}{2}\log_{10} 1.6$

$= \log_{10}\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}}\sqrt{7.5}\sqrt{1.6}\right) = \log_{10}\sqrt{\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{15}{2} \cdot \dfrac{8}{5}} = \log_{10}\sqrt{10} = \dfrac{1}{2}$

別解 (与式) $= \dfrac{1}{2}(\log_{10} 5 - \log_{10} 6 + \log_{10} 7.5 + \log_{10} 1.6)$

$= \dfrac{1}{2}(\log_{10} 5 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3 + \log_{10} 5 + \log_{10} 3 - \log_{10} 2 + 4\log_{10} 2 - 1)$

$= \log_{10} 5 + \log_{10} 2 - \dfrac{1}{2}$

$= \log_{10} 10 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

2 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 27 \cdot \log_3 64 \cdot \log_{25}\sqrt{125} \cdot \log_{27} 81$　(2) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$

(3) $(\log_5 3 + \log_{25} 9)(\log_9 5 - \log_3 25)$

解答 (1) 18　(2) $\dfrac{35}{3}$　(3) -3

解説

(1) (与式) $= \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 2} \cdot \log_3 2^6 \cdot \dfrac{\log_3 5^{\frac{3}{2}}}{\log_3 5^2} \cdot \dfrac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3}$

$= \dfrac{3}{\log_3 2} \cdot 6\log_3 2 \cdot \dfrac{\frac{3}{2}\log_3 5}{2\log_3 5} \cdot \dfrac{4}{3} = 18$

(2) (与式) $= \left(\log_2 9 + \dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\dfrac{\log_2 16}{\log_2 3} + \dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$= \left(2\log_2 3 + \dfrac{\log_2 3}{3}\right)\left(\dfrac{4}{\log_2 3} + \dfrac{2}{2\log_2 3}\right)$

$= \dfrac{7}{3}\log_2 3 \cdot \dfrac{5}{\log_2 3} = \dfrac{35}{3}$

(3) (与式) $= \left(\log_5 3 + \dfrac{\log_5 9}{\log_5 25}\right)\left(\dfrac{1}{\log_5 9} - \dfrac{\log_5 25}{\log_5 3}\right)$

$= (\log_5 3 + \log_5 3)\left(\dfrac{1}{2\log_5 3} - \dfrac{2}{\log_5 3}\right)$

$= 2\log_5 3\left(-\dfrac{3}{2\log_5 3}\right) = -3$

3 (1) $\log_2 3 = a$，$\log_3 5 = b$ のとき，$\log_2 10$ と $\log_{15} 40$ を a，b で表せ。

(2) $\log_x a = \dfrac{1}{3}$，$\log_x b = \dfrac{1}{8}$，$\log_x c = \dfrac{1}{24}$ のとき，$\log_{abc} x$ の値を求めよ。

(3) a，b，c を 1 でない正の数とし，$\log_a b = \alpha$，$\log_b c = \beta$，$\log_c a = \gamma$ とする。

このとき，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$ が成り立つことを証明せよ。

解答 (1) $\log_2 10 = 1 + ab$，$\log_{15} 40 = \dfrac{ab+3}{a(b+1)}$　(2) 2　(3) 略

解説

(1) $\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$

ここで　$\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2} = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$

よって　$\log_2 10 = 1 + ab$

また　$\log_{15} 40 = \dfrac{\log_2 40}{\log_2 15} = \dfrac{\log_2 (5 \cdot 2^3)}{\log_2 (3 \cdot 5)} = \dfrac{\log_2 5 + 3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \dfrac{ab+3}{a+ab} = \dfrac{ab+3}{a(b+1)}$

(2) $\log_x abc = \log_x a + \log_x b + \log_x c = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{2}$

よって　$\log_{abc} x = \dfrac{1}{\log_x abc} = 2$

(3) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$　…… ①

$\alpha\beta\gamma = \log_a b \log_b c \log_c a = \log_a b \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \dfrac{1}{\log_a c} = 1$

であるから，① より $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ が成り立つ。

したがって，等式は証明された。

別解 $\alpha\beta = \log_a b \log_b c = \log_a c$　同様に　$\beta\gamma = \log_b a$，$\gamma\alpha = \log_c b$

したがって　(左辺) $= \log_a c + \log_b a + \log_c b = \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$

4 (1) 次の値を求めよ。

(ア) $16^{\log_2 3}$　(イ) $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\log_7 \frac{2}{3}}$

(2) $3^x = 5^y = \sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

解答 (1) (ア) 81　(イ) $\dfrac{9}{4}$　(2) 2

解説

(1) (ア) $16^{\log_2 3} = M$ とおく。

左辺は正であるから，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 16^{\log_2 3} = \log_2 M$　すなわち　$\log_2 3 \log_2 16 = \log_2 M$

ゆえに　$4\log_2 3 = \log_2 M$

よって　$M = 3^4 = 81$

別解 $16^{\log_2 3} = (2^4)^{\log_2 3} = 2^{4\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^4 = 3^4 = 81$

(イ) $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\log_7 \frac{2}{3}} = (7^{-2})^{\log_7 \frac{2}{3}} = 7^{-2\log_7 \frac{2}{3}} = 7^{\log_7 \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} = 7^{\log_7 \frac{9}{4}}$

$7^{\log_7 \frac{9}{4}} = M$ とおく。

左辺は正であるから，両辺の 7 を底とする対数をとると

$\log_7 7^{\log_7 \frac{9}{4}} = \log_7 M$

ゆえに　$\log_7 \dfrac{9}{4} = \log_7 M$　すなわち　$M = \dfrac{9}{4}$

(2) $3^x = \sqrt{15}$ から　$x = \log_3 \sqrt{15} = \dfrac{1}{2}\log_3 15$

$5^y = \sqrt{15}$ から　$y = \log_5 \sqrt{15} = \dfrac{1}{2}\log_5 15$

よって　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{\log_3 15} + \dfrac{2}{\log_5 15} = 2(\log_{15} 3 + \log_{15} 5)$

$= 2\log_{15}(3 \cdot 5) = 2\log_{15} 15 = 2$

5 (1) $\left(\log_3 \sqrt{\sqrt[3]{64}} + \log_9 \sqrt[3]{64}\right)\left(\log_2 \sqrt{81} + \log_4 \sqrt[4]{81}\right)$ を計算せよ。

(2) $\log_2 3 = a$，$\log_3 7 = b$ のとき，$\log_2 7$ を a，b で表すと ア $\boxed{}$ である。したがって，$\log_{21} 56$，$\log_{\frac{2}{7}} \dfrac{49}{12}$ を a，b で表すと，それぞれ イ $\boxed{}$，ウ $\boxed{}$ である。

解答 (1) 5　(2) (ア) ab　(イ) $\dfrac{ab+3}{a(b+1)}$　(ウ) $\dfrac{2ab-a-2}{1-ab}$

解説

(1) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{\sqrt[3]{4^3}}=\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4=2^2$,

$\sqrt{81}=9=3^2$, $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

よって $\left(\log_3\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\log_9\sqrt[3]{64}\right)\left(\log_2\sqrt{81}+\log_4\sqrt[4]{81}\right)$

$=(\log_3 2+2\log_9 2)(2\log_2 3+\log_4 3)$

$=\left(\dfrac{1}{\log_2 3}+2\cdot\dfrac{\log_2 2}{2\log_2 3}\right)\left(2\log_2 3+\dfrac{\log_2 3}{2\log_2 2}\right)$

$=\dfrac{2}{\log_2 3}\cdot\dfrac{5\log_2 3}{2}=5$

(2) $\log_2 3=a$ から $\dfrac{1}{\log_3 2}=a$

よって $\log_2 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}={}^{ア}ab$

したがって $\log_{21}56=\dfrac{\log_2 56}{\log_2 21}=\dfrac{3\log_2 2+\log_2 7}{\log_2 3+\log_2 7}=\dfrac{3+ab}{a+ab}={}^{イ}\dfrac{ab+3}{a(b+1)}$

$\log_{\frac{2}{7}}\dfrac{49}{12}=\dfrac{\log_2\dfrac{49}{12}}{\log_2\dfrac{2}{7}}=\dfrac{2\log_2 7-2\log_2 2-\log_2 3}{1-\log_2 7}={}^{ウ}\dfrac{2ab-a-2}{1-ab}$

6 0 でない実数 x, y, z, w と正の整数 a, b, c, d が,

$$a^x=b^y=c^z=d^w,\quad \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{w}$$

を満たすものとする。ただし，$a>b>c>1$, $d>1$ とする。

(1) a, b, c を用いて d を表せ。

(2) $d\leqq 1000$ かつ $\sqrt{d}$ が整数であるような d を 1 つ求めよ。

解答 (1) $d=ab^2c^3$ (2) $d=576$

解説

(1) $a^x=b^y=c^z=d^w$ の各辺の d を底とする対数をとると

$x\log_d a=y\log_d b=z\log_d c=w$

よって $x=\dfrac{w}{\log_d a}$, $y=\dfrac{w}{\log_d b}$, $z=\dfrac{w}{\log_d c}$

ゆえに $\dfrac{1}{x}=\dfrac{\log_d a}{w}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_d b}{w}$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log_d c}{w}$

これらを $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{w}$ に代入すると

$\dfrac{\log_d a+2\log_d b+3\log_d c}{w}=\dfrac{1}{w}$

よって $\log_d(ab^2c^3)=1$ したがって $d=ab^2c^3$

(2) $\sqrt{d}=\sqrt{ab^2c^3}=bc\sqrt{ac}$

$\sqrt{d}$ が整数であるための条件は，積 ac が平方数となることである。

そのような自然数 a, c $(a>c>1)$ のうち，最小のものは $a=2^3$, $c=2$

$b=3$ とすると $d=2^3\cdot 3^2\cdot 2^3=576$ これは $d\leqq 1000$ を満たす。

参考 $b=4$ とすると $d=2^3\cdot 4^2\cdot 2^3=1024>1000$

また，$c\geqq 3$ のとき，常に $d>1000$ となる。

したがって，条件を満たす d は $d=576$ のみである。