数学演習（対数）Ｈ２３．２．１９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

１．次の関係を，(1)～(3) は $p=\log_a M$，(4)～(6) は $a^p=M$ の形で表せ。

(1) $3^4=81$　(2) $5^0=1$　(3) $8^{\frac{1}{3}}=2$

(4) $2=\log_{10}100$　(5) $6=\log_{\sqrt{2}}8$　(6) $-\dfrac{1}{2}=\log_9\dfrac{1}{3}$

２．次の値を求めよ。

(1) $\log_4 16$　(2) $\log_3 81$　(3) $\log_5 5$　(4) $\log_7 1$

(5) $\log_3\dfrac{1}{9}$　(6) $\log_{\frac{1}{5}}25$　(7) $\log_{0.5}\sqrt{8}$　(8) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}$

３．次の計算をせよ。

(1) $\log_2\dfrac{4}{3}+\log_2 12$　(2) $\log_3 7-\log_3 21$

(3) $\log_{10}4+\log_{10}200-3\log_{10}2$　(4) $2\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6+\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

４．底の変換公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\log_8 32$　(2) $\log_2 5\cdot\log_5 2$　(3) $\log_3 8\cdot\log_4 3$

５．次の計算をせよ。

(1) $\log_5 10-\log_5 2\sqrt{5}$　(2) $\log_{10}5\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{4}{5}$

(3) $\log_{\sqrt{5}}125$　(4) $\log_5 9\cdot\log_9 25$

６．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\log_5 2+3\log_5\sqrt{2}-\log_5 4$　(2) $\log_3 4\cdot\log_4 27$

7．$(\log_3 4+\log_9 16)(\log_4 9+\log_{16} 3)$ の値を求めよ。

8．次の計算をせよ。

(1)　$\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 4$　　(2)　$(\log_4 9-\log_{16} 3)(\log_3\sqrt{2}-\log_9\sqrt[3]{4})$

9．$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とおくとき，次の値を a，b で表せ。

(1)　$\log_{10}\dfrac{1}{12}$　　(2)　$\log_{10}15$　　(3)　$\log_{10}\sqrt{0.75}$

(4)　$\log_2 27$　　(5)　$\log_{18}\sqrt[3]{24}$

10．(1)　$\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2)　$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

11．次の値を求めよ。

(1)　$10^{\log_{10}3}$　　(2)　$3^{-2\log_3 4}$　　(3)　$16^{\log_2 10}$

１．次の関係を，(1)～(3) は $p=\log_a M$，(4)～(6) は $a^p=M$ の形で表せ。

(1) $3^4=81$　　(2) $5^0=1$　　(3) $8^{\frac{1}{3}}=2$

(4) $2=\log_{10}100$　　(5) $6=\log_{\sqrt{2}}8$　　(6) $-\dfrac{1}{2}=\log_9\dfrac{1}{3}$

解答　(1) $4=\log_3 81$　(2) $0=\log_5 1$　(3) $\dfrac{1}{3}=\log_8 2$　(4) $10^2=100$

(5) $(\sqrt{2})^6=8$　(6) $9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

解説

(1) $4=\log_3 81$

(2) $0=\log_5 1$

(3) $\dfrac{1}{3}=\log_8 2$

(4) $10^2=100$

(5) $(\sqrt{2})^6=8$

(6) $9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

２．次の値を求めよ。

(1) $\log_4 16$　　(2) $\log_3 81$　　(3) $\log_5 5$　　(4) $\log_7 1$

(5) $\log_3\dfrac{1}{9}$　　(6) $\log_{\frac{1}{5}}25$　　(7) $\log_{0.5}\sqrt{8}$　　(8) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}$

解答　(1) 2　(2) 4　(3) 1　(4) 0　(5) -2　(6) -2　(7) $-\dfrac{3}{2}$

(8) -6

解説

(1) $\log_4 16=\log_4 4^2=2$

(2) $\log_3 81=\log_3 3^4=4$

(3) $\log_5 5=\log_5 5^1=1$

(4) $\log_7 1=\log_7 7^0=0$

(5) $p=\log_3\dfrac{1}{9}$ とおくと　$3^p=\dfrac{1}{9}$　　ゆえに　$3^p=3^{-2}$

よって　$p=-2$

別解　$\log_3\dfrac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

(6) $p=\log_{\frac{1}{5}}25$ とおくと　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^p=25$

ゆえに　$5^{-p}=5^2$　　よって　$-p=2$

すなわち　$p=-2$

別解　$\log_{\frac{1}{5}}25=\dfrac{\log_5 25}{\log_5\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\log_5 5^2}{\log_5 5^{-1}}=-2$

(7) $p=\log_{0.5}\sqrt{8}$ とおくと　$(0.5)^p=\sqrt{8}$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^p=2^{\frac{3}{2}}$　　よって　$2^{-p}=2^{\frac{3}{2}}$

したがって，$-p=\dfrac{3}{2}$ から　$p=-\dfrac{3}{2}$

別解　$\log_{0.5}\sqrt{8}=\dfrac{\log_2\sqrt{8}}{\log_2 0.5}=\dfrac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^{-1}}=-\dfrac{3}{2}$

(8) $p=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}$ とおくと　$(\sqrt{3})^p=\dfrac{1}{27}$

ゆえに　$3^{\frac{p}{2}}=3^{-3}$　　よって　$\dfrac{p}{2}=-3$

したがって　$p=-6$

別解　$\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}=\dfrac{\log_3\dfrac{1}{27}}{\log_3\sqrt{3}}=\dfrac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}=-6$

３．次の計算をせよ。

(1) $\log_2\dfrac{4}{3}+\log_2 12$　　(2) $\log_3 7-\log_3 21$

(3) $\log_{10}4+\log_{10}200-3\log_{10}2$　　(4) $2\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6+\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解答　(1) 4　(2) -1　(3) 2　(4) 0

解説

(1) $(\text{与式})=\log_2\left(\dfrac{4}{3}\times 12\right)=\log_2 16=4$

(2) $(\text{与式})=\log_3\dfrac{7}{21}=\log_3\dfrac{1}{3}=-1$

(3) $(\text{与式})=\log_{10}\dfrac{4\times 200}{2^3}=\log_{10}100=2$

(4) $(\text{与式})=\log_3(\sqrt{3})^2-\log_3 6^{\frac{1}{2}}+\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\log_3\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\log_3 1=0$

４．底の変換公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\log_8 32$　　(2) $\log_2 5\cdot\log_5 2$　　(3) $\log_3 8\cdot\log_4 3$

解答　(1) $\dfrac{5}{3}$　(2) 1　(3) $\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $\log_8 32=\dfrac{\log_2 32}{\log_2 8}=\dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3}=\dfrac{5}{3}$

(2) $\log_2 5\cdot\log_5 2=\log_2 5\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 5}=\log_2 2=1$

(3) $\log_3 8\cdot\log_4 3=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3}{2}$

別解　$\log_3 8\cdot\log_4 3=\log_3 8\cdot\dfrac{\log_3 3}{\log_3 4}=\log_3 2^3\cdot\dfrac{1}{\log_3 2^2}=\dfrac{3}{2}$

５．次の計算をせよ。

(1) $\log_5 10-\log_5 2\sqrt{5}$　　(2) $\log_{10}5\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{4}{5}$

(3) $\log_{\sqrt{5}}125$　　(4) $\log_5 9\cdot\log_9 25$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 1　(3) 6　(4) 2

解説

(1) $(\text{与式})=\log_5\dfrac{10}{2\sqrt{5}}=\log_5\sqrt{5}=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(2) $(\text{与式})=\log_{10}\left\{5\sqrt{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\log_{10}\left(5\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\log_{10}10=1$

(3) $(\text{与式})=\dfrac{\log_5 125}{\log_5\sqrt{5}}=\dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 5^{\frac{1}{2}}}=6$

別解　$(\text{与式})=\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^6=6$

(4) $(\text{与式})=\log_5 9\cdot\dfrac{\log_5 25}{\log_5 9}=\log_5 25=2$

６．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\log_5 2+3\log_5\sqrt{2}-\log_5 4$　　(2) $\log_3 4\cdot\log_4 27$

解答　(1) 0　(2) 3

解説

(1) $\dfrac{1}{2}\log_5 2+3\log_5\sqrt{2}-\log_5 4=\log_5 2^{\frac{1}{2}}+\log_5\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3-\log_5 2^2$

$=\log_5 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2}=\log_5 2^0=\log_5 1=0$

(2) $\log_3 4\cdot\log_4 27=\log_3 4\cdot\dfrac{\log_3 27}{\log_3 4}=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

７．$(\log_3 4+\log_9 16)(\log_4 9+\log_{16}3)$ の値を求めよ。

解答　5

解説

$(\log_3 4+\log_9 16)(\log_4 9+\log_{16}3)=\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 16}{\log_2 9}\right)\left(\dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)$

$=\left(\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2}\right)\left(\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 2^4}\right)$

$=\left(\dfrac{2}{\log_2 3}+\dfrac{4}{2\log_2 3}\right)\left(\dfrac{2\log_2 3}{2}+\dfrac{\log_2 3}{4}\right)$

ここで，$\log_2 3=a$ とすると

$(\text{与式})=\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{4}{2a}\right)\left(\dfrac{2a}{2}+\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{4}{a}\times\dfrac{5a}{4}=5$

８．次の計算をせよ。

(1) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 4$　　(2) $(\log_4 9-\log_{16}3)(\log_3\sqrt{2}-\log_9\sqrt[3]{4})$

解答　(1)　2　　(2)　$\frac{1}{8}$

解説

(1)　(与式)$=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}=\log_2 4=2$

(2)　(与式)$=\left(\frac{\log_2 9}{\log_2 4}-\frac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)\left(\frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2 3}-\frac{\log_2\sqrt[3]{4}}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}-\frac{\log_2 3}{\log_2 2^4}\right)\left(\frac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 3}-\frac{\log_2 2^{\frac{2}{3}}}{\log_2 3^2}\right)$

$=\left(\frac{2\log_2 3}{2}-\frac{\log_2 3}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}}{\log_2 3}-\frac{\frac{2}{3}}{2\log_2 3}\right)$

ここで，$\log_2 3=a$とすると

(与式)　$=\left(a-\frac{a}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}}{a}-\frac{\frac{2}{3}}{2a}\right)=\left(a-\frac{a}{4}\right)\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a}\right)=\frac{3a}{4}\times\frac{1}{6a}=\frac{1}{8}$

9．$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とおくとき，次の値を a，b で表せ。

(1)　$\log_{10}\frac{1}{12}$　　(2)　$\log_{10}15$　　(3)　$\log_{10}\sqrt{0.75}$

(4)　$\log_2 27$　　(5)　$\log_{18}\sqrt[3]{24}$

解答　(1)　$-2a-b$　　(2)　$1-a+b$　　(3)　$\frac{b}{2}-a$　　(4)　$\frac{3b}{a}$　　(5)　$\frac{3a+b}{3a+6b}$

解説

(1)　$\log_{10}\frac{1}{12}=\log_{10}12^{-1}=-\log_{10}12=-\log_{10}(2^2\times3)$

$=-\log_{10}2^2-\log_{10}3$

$=-2\log_{10}2-\log_{10}3=-2a-b$

(2)　$\log_{10}15=\log_{10}(5\times3)=\log_{10}5+\log_{10}3=\log_{10}\frac{10}{2}+\log_{10}3$

$=\log_{10}10-\log_{10}2+\log_{10}3=1-a+b$

(3)　$\log_{10}\sqrt{0.75}=\log_{10}\sqrt{\frac{3}{4}}=\log_{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}(\log_{10}3-\log_{10}2^2)$

$=\frac{1}{2}(\log_{10}3-2\log_{10}2)=\frac{1}{2}(b-2a)=\frac{b}{2}-a$

(4)　$\log_2 27=\frac{\log_{10}27}{\log_{10}2}=\frac{\log_{10}3^3}{\log_{10}2}=\frac{3\log_{10}3}{\log_{10}2}=\frac{3b}{a}$

(5)　$\log_{18}\sqrt[3]{24}=\log_{18}24^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_{18}24=\frac{1}{3}\cdot\frac{\log_{10}24}{\log_{10}18}=\frac{\log_{10}(2^3\times3)}{3\log_{10}(2\times3^2)}$

$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{3(\log_{10}2+2\log_{10}3)}=\frac{3a+b}{3a+6b}$

10. (1)　$\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2)　$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

解答　(1)　$3a$　　(2)　$\frac{2+a+ab}{1+a}$

解説

(1)　$\log_{25}64=\frac{\log_5 64}{\log_5 25}=\frac{6\log_5 2}{2}=3\log_5 2=3a$

(2)　$\log_6 84=\frac{\log_2(2^2\times3\times7)}{\log_2(2\times3)}=\frac{2+\log_2 3+\log_2 7}{1+\log_2 3}$

ここで　$\log_3 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 3}$　より　$b=\frac{\log_2 7}{a}$

分母払って　$\log_2 7=ab$

よって　$\log_6 84=\frac{2+a+ab}{1+a}$

11. 次の値を求めよ。

(1)　$10^{\log_{10}3}$　　(2)　$3^{-2\log_3 4}$　　(3)　$16^{\log_2 10}$

解答　(1)　3　　(2)　$\frac{1}{16}$　　(3)　10000

解説

(1)　$x=10^{\log_{10}3}$ とおいて，両辺の 10 を底とする対数をとると

$\log_{10}x=\log_{10}3\cdot\log_{10}10$　すなわち　$\log_{10}x=\log_{10}3$

よって　$x=3$

(2)　$x=3^{-2\log_3 4}$ とおいて，両辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 x=-2\log_3 4\cdot\log_3 3$　すなわち　$\log_3 x=\log_3 4^{-2}$

よって　$x=\frac{1}{16}$

(3)　$x=16^{\log_2 10}$ とおいて，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 x=\log_2 10\cdot\log_2 16$　すなわち　$\log_2 x=4\log_2 10$

ゆえに　$\log_2 x=\log_2 10^4$　　よって　$x=10000$