数学演習（対数関数）Ｈ２３．６．１０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．次の計算をせよ。　$2\log_3\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_3 6+\log_3\frac{\sqrt{6}}{3}$

２．次の値を求めよ。　$16^{\log_2 10}$

３．$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

４．次の計算をせよ。

(1)　$\log_2 3\cdot\log_3 25\cdot\log_5 4$　　(2)　$(\log_4 9-\log_{16}3)(\log_3\sqrt{2}-\log_9\sqrt[3]{4})$

５．次の関数のグラフをかけ。　$y=\log_{\frac{1}{2}}4x$

６．次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(2)　$(\log_3 x)^2=\log_3 x^2+3$

7．次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$

(2) $2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$

(3) $2^{x+1}>3^x$

8．次の最大値または最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)$

(2) $y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4$ $(1\leqq x\leqq 32)$

9．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 2^{100} は何桁の整数か。

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

数学演習（対数関数）Ｈ２３．６．１０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．次の計算をせよ。　$2\log_3\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_3 6+\log_3\frac{\sqrt{6}}{3}$

解答　0

解説

$(与式)=\log_3(\sqrt{3})^2-\log_3 6^{\frac{1}{2}}+\log_3\frac{\sqrt{6}}{3}=\log_3\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\log_3 1=0$

2．次の値を求めよ。　$16^{\log_2 10}$

解答　10000

解説

$x=16^{\log_2 10}$ とおいて，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 x=\log_2 10\cdot\log_2 16$　すなわち　$\log_2 x=4\log_2 10$

ゆえに　$\log_2 x=\log_2 10^4$　　よって　$x=10000$

3．$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

解答　$\frac{2+a+ab}{1+a}$

解説

$\log_6 84=\frac{\log_2(2^2\times3\times7)}{\log_2(2\times3)}=\frac{2+\log_2 3+\log_2 7}{1+\log_2 3}$

ここで　$\log_3 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 3}$　より　$b=\frac{\log_2 7}{a}$　ゆえに　$\log_2 7=ab$

よって　$\log_6 84=\frac{2+a+ab}{1+a}$

4．次の計算をせよ。

(1)　$\log_2 3\cdot\log_3 25\cdot\log_5 4$　　(2)　$(\log_4 9-\log_{16}3)(\log_3\sqrt{2}-\log_9\sqrt[3]{4})$

解答　(1)　4　　(2)　$\frac{1}{8}$

解説

(1)　$(与式)=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 25}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}$

$=\log_2 3\cdot\frac{2\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\frac{2}{\log_2 5}=4$

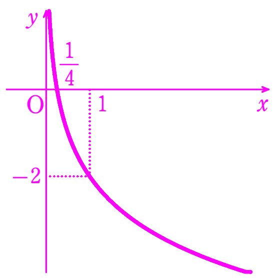
(2)　$(与式)=\left(\frac{\log_2 9}{\log_2 4}-\frac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)\left(\frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2 3}-\frac{\log_2\sqrt[3]{4}}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\frac{2\log_2 3}{2}-\frac{\log_2 3}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}}{\log_2 3}-\frac{\frac{2}{3}}{2\log_2 3}\right)$

$=\left(\frac{3}{4}\log_2 3\right)\left(\frac{1}{6\log_2 3}\right)=\frac{1}{8}$

5．次の関数のグラフをかけ。　$y=\log_{\frac{1}{2}}4x$

解答



解説

$y=\log_{\frac{1}{2}}4x=\log_{\frac{1}{2}}4+\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}x-2$

よって，$y=\log_{\frac{1}{2}}4x$ のグラフは，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ のグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動

また，漸近線はy軸である。

6．次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(2)　$(\log_3 x)^2=\log_3 x^2+3$

解答　(1)　$x=1$　　(2)　$x=\frac{1}{3}$，27

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$

これを解いて　$x>0$　……①

方程式から　$\log_2 x(x+3)=\log_2 2^2$

ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理して　$x^2+3x-4=0$

よって　$(x-1)(x+4)=0$

したがって　$x=1$，-4

① を満たすのは　$x=1$

(2)　方程式から　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

ゆえに　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-3)=0$

よって　$\log_3 x=-1$，3

したがって　$x=\frac{1}{3}$，27

これは　真数が正であることから$x>0$を満たす。

7．次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$

(2) $2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$

(3) $2^{x+1}>3^{x}$

解答 (1) $1<x<\frac{4}{3}$ (2) $2<x<5$ (3) $x<\frac{1}{\log_{2}3-1}$

解説

(1) 真数は正であるから $x-1>0$

ゆえに $x>1$ ……①

不等式は $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $x-1<\frac{1}{3}$

よって $x<\frac{4}{3}$ ……②

①，②から，解は $1<x<\frac{4}{3}$

(2) 真数は正であるから $x-2>0$ かつ $x+4>0$

これを解いて $x>2$ ……①

不等式から $\log_{0.2}(x-2)^{2}>\log_{0.2}(x+4)$

底0.2は1より小さいから $(x-2)^{2}<x+4$

整理すると $x^{2}-5x<0$

よって $0<x<5$ ……②

①，②から，解は $2<x<5$

(3) 与式の両辺は正であるから，2を底とする対数をとると

$\log_{2}2^{x+1}>\log_{2}3^{x}$

ゆえに $x+1>x\log_{2}3$

よって $(\log_{2}3-1)x<1$

$\log_{2}3-1>0$ であるから $x<\frac{1}{\log_{2}3-1}$

参考 与式の両辺の3を底とする対数をとると，解は次のようになる。

$$x<\frac{\log_{3}2}{1-\log_{3}2}$$

表し方は違うが，$\frac{1}{\log_{2}3-1}$ も $\frac{\log_{3}2}{1-\log_{3}2}$ も同じ数である。

8．次の最大値または最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)$

(2) $y=-(\log_{2}x)^{2}+\log_{2}x^{4}$ $(1\leqq x\leqq 32)$

解答 (1) 最大値はなし，$x=3$ のとき最小値 -2

(2) $x=4$ のとき最大値4，$x=32$ のとき最小値 -5

解説

(1) 真数は正であるから $x-1>0$ かつ $5-x>0$

ゆえに，定義域は $1<x<5$ ……①

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(5-x)$ であり，

$(x-1)(5-x)=-x^{2}+6x-5=-(x^{2}-6x+3^{2})+3^{2}-5=-(x-3)^{2}+4$ であるから

$y=\log_{\frac{1}{2}}\{-(x-3)^{2}+4\}$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから，$-(x-3)^{2}+4$が最大のときyは最小となり，$-(x-3)^{2}+4$が最小のときyは最大となる。

①の範囲において，$-(x-3)^{2}+4$ は，$x=3$ のとき最大値4をとる。

このとき y は最小となり，最小値は $\log_{\frac{1}{2}}4=-2$

また，$1<x<5$という定義域より最小値はない。

したがって，yに最大値はない。

よって，y は，$x=3$ のとき最小値 -2 をとり，最大値は存在しない。

(2) $y=-(\log_{2}x)^{2}+\log_{2}x^{4}=-(\log_{2}x)^{2}+4\log_{2}x$

$\log_{2}x=t$ とおく。

$1\leqq x\leqq 32$ であるから $\log_{2}1\leqq\log_{2}x\leqq\log_{2}32$

すなわち $0\leqq t\leqq 5$ ……①

y を t の式で表すと

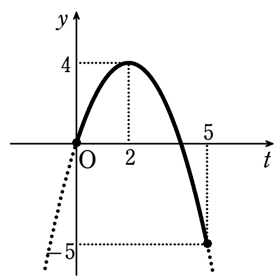
$y=-t^{2}+4t=-(t-2)^{2}+4$

①の範囲において，y は

$t=2$ のとき最大値4，

$t=5$ のとき最小値 -5

をとる。



$t=2$ となるのは，$\log_{2}x=2$ から $x=4$

$t=5$ となるのは，$\log_{2}x=5$ から $x=32$

のときである。

したがって，y は，$x=4$ のとき最大値4，$x=32$ のとき最小値 -5 をとる。

これは，真数が正より$x>0$を満たす。

9．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 2^{100} は何桁の整数か。

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ は小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。

解答 (1) 31桁 (2) 小数第48位

解説

(1) $\log_{10}2^{100}=100\log_{10}2=100\times 0.3010=30.10$

ゆえに $30<\log_{10}2^{100}<31$

すなわち $\log_{10}10^{30}<\log_{10}2^{100}<\log_{10}10^{31}$

よって $10^{30}<2^{100}<10^{31}$

したがって，2^{100} は31桁の数である。

(2) $\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}=-100\log_{10}3=-100\times 0.4771=-47.71$

ゆえに $-48<\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}<-47$

すなわち $\log_{10}10^{-48}<\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}<\log_{10}10^{-47}$

よって $10^{-48}<\left(\frac{1}{3}\right)^{100}<10^{-47}$

したがって，小数第48位に初めて0でない数字が現れる。