数学演習（対数関数）Ｈ２３．２．２４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１．次の関数のグラフをかけ。また，⑵，⑶ のグラフと ⑴ のグラフとの位置関係をいえ。

⑴　$y=\log_4 x$　　⑵　$y=\log_{\frac{1}{4}} x$　　⑶　$y=\log_4(x-3)$

２．次の数の大小関係を調べよ。

⑴　$\log_3 0.8$，$\log_3 5$，$\log_3 7$　　⑵　$\log_{0.2} 0.6$，$\log_{0.2} 4$，$\log_{0.2} 8$

３．次の数の大小関係を調べよ。

⑴　$\log_{0.8} 5$，$\log_2 5$，$\log_3 5$　　⑵　$3\log_4 3$，$2\log_2 3$，3

４．次の方程式と不等式を解け。

⑴　$\log_5 x=2$　　⑵　$\log_{\frac{1}{3}} x=-2$　　⑶　$\log_2 x=\dfrac{1}{2}$

⑷　$\log_4 x<2$　　⑸　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　　⑹　$\log_{\frac{1}{6}} x<-2$

５．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

⑴　$y=(\log_3 x)^2-6\log_3 x+8$ $(1\leqq x\leqq 27)$

⑵　$y=-(\log_2 x)^2+\log_4 x^8$ $(1\leqq x\leqq 32)$

6．次の方程式を解け。

(1)　$\log_4(x+3)=\log_4(2x+2)$　　(2)　$\log_2(x^2+x-2)=2$

(3)　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(4)　$(\log_3 x)^2=\log_{\sqrt{3}} x+3$

(5)　$(\log_2 x)^2=\log_2 4x$

7．次の不等式を解け。

(1)　$\log_5(2x+3)<\log_5(x+5)$　　(2)　$2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$

(3)　$(\log_2 x+3)(\log_2 x-1)>0$　　(4)　$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^3-4\leqq 0$

(5)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)$

8．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\log_4(x-3)=\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\log_2(x+1)>1$　　(3)　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$

9．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の数は何桁の整数か。

(1)　2^{100}　　(2)　3^{40}　　(3)　6^{25}

数学演習（対数関数）Ｈ２３．２．２４　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の関数のグラフをかけ。また，(2)，(3) のグラフと (1) のグラフとの位置関係をいえ。

(1) $y=\log_4 x$　　(2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$　　(3) $y=\log_4(x-3)$

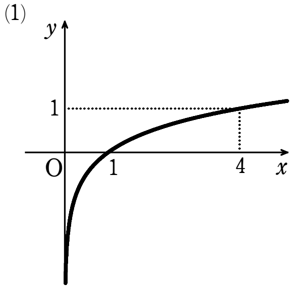
解答

(1) グラフは [図]　(2) グラフは [図]

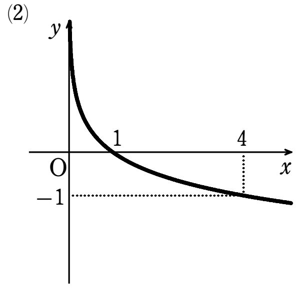
参考　このグラフは，$y=\log_{\frac{1}{4}} x=\dfrac{\log_4 x}{\log_4\frac{1}{4}}=\dfrac{\log_4 x}{-1}$　より　$-y=\log_4 x$　よって

$y=\log_4 x$ のグラフと x 軸について対称である。

(1)



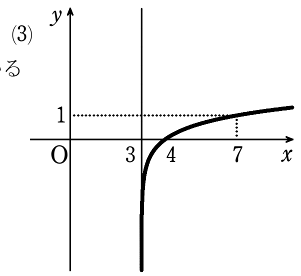
(2)



(3) グラフは [図]

このグラフは，$y=\log_4 x$ のxに$x-3$が代入されているので$y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

(3)



2．次の数の大小関係を調べよ。

(1) $\log_3 0.8$，$\log_3 5$，$\log_3 7$　　(2) $\log_{0.2}0.6$，$\log_{0.2}4$，$\log_{0.2}8$

解答　(1) $\log_3 0.8<\log_3 5<\log_3 7$　(2) $\log_{0.2}8<\log_{0.2}4<\log_{0.2}0.6$

(1) 真数について　$0.8<5<7$

底 3 は 1 より大きいから　大小関係は保存される

よって　$\log_3 0.8<\log_3 5<\log_3 7$

(2) 真数について　$0.6<4<8$

底 0.2 は 1 より小さいから　大小関係は逆転するので

$\log_{0.2}0.6>\log_{0.2}4>\log_{0.2}0.6$

つまり　$\log_{0.2}8<\log_{0.2}4<\log_{0.2}0.6$

3．次の数の大小関係を調べよ。

(1) $\log_{0.8}5$，$\log_2 5$，$\log_3 5$　　(2) $3\log_4 3$，$2\log_2 3$，3

解答　(1) $\log_{0.8}5<\log_3 5<\log_2 5$　(2) $3\log_4 3<3<2\log_2 3$

(1) $\log_{0.8}5=\dfrac{\log_5 5}{\log_5 0.8}=\dfrac{1}{\log_5 0.8}$，

$\log_2 5=\dfrac{\log_5 5}{\log_5 2}=\dfrac{1}{\log_5 2}$，

$\log_3 5=\dfrac{\log_5 5}{\log_5 3}=\dfrac{1}{\log_5 3}$

ここで，$\log_5 0.8$について，底 5 は 1 より大きいので

$\log_5 0.8<\log_5 1$　より　$\log_5 0.8<0$である。つまり　$\log_5 0.8$は負の数

また，$\log_5 2$　と　$\log_5 3$　は正の数であり，底 5 は 1 より大きいので

$\log_5 2<\log_5 3$

が成り立つ。逆数をとると，大小関係は逆転するので

$$\frac{1}{\log_5 2}>\frac{1}{\log_5 3}$$

以上より

$$\frac{1}{\log_5 0.8}<0<\frac{1}{\log_5 3}<\frac{1}{\log_5 2}$$

よって　$\log_{0.8}5<\log_3 5<\log_2 5$

(2) $3\log_4 3=3\cdot\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}=\dfrac{3}{2}\log_2 3=\log_2 3^{\frac{3}{2}}$，$2\log_2 3=\log_2 3^2$，$3=\log_2 2^3$

底 2 は 1 より大きく，また，$3^{\frac{3}{2}}$，3^2，2^3について，すべて２乗すると

$\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2=3^3=27$，$(3^2)^2=3^4=81$，$(2^3)^2=2^6=64$

ゆえに，$3^{\frac{3}{2}}<2^3<3^2$ であるから

$$\log_2 3^{\frac{3}{2}}<\log_2 2^3<\log_2 3^2$$

すなわち　$3\log_4 3<3<2\log_2 3$

4．次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_5 x=2$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$　　(3) $\log_2 x=\dfrac{1}{2}$

(4) $\log_4 x<2$　　(5) $\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　　(6) $\log_{\frac{1}{6}} x<-2$

解答　(1) $x=25$　(2) $x=9$　(3) $x=\sqrt{2}$　(4) $0<x<16$　(5) $0<x\leqq\dfrac{1}{8}$

(6) $x>36$

(1) 真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$x=5^2$

すなわち　$x=25$　これは①を満たす

(2) 真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

すなわち　$x=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$　これは①を満たす

(3) 真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$x=2^{\frac{1}{2}}$

すなわち　$x=\sqrt{2}$　これは①を満たす

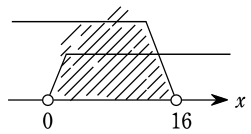
(4) 真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_4 x<\log_4 4^2$

すなわち　$\log_4 x<\log_4 16$

底 4 は 1 より大きいから　$x<16$　……②

①，② から，解は　$0<x<16$



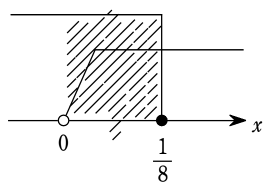
(5) 真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{8}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\leqq\dfrac{1}{8}$　……②

①，② から，解は　$0<x\leqq\dfrac{1}{8}$



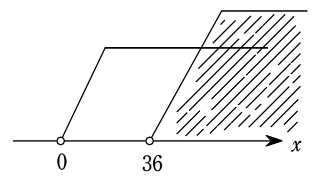
(6) 真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-2}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{6}} x<\log_{\frac{1}{6}} 36$

底 $\dfrac{1}{6}$ は 1 より小さいから　$x>36$

① との共通範囲より　$x>36$



5．次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y=(\log_3 x)^2-6\log_3 x+8$ $(1\leqq x\leqq 27)$

(2) $y=-(\log_2 x)^2+\log_4 x^8$ $(1\leqq x\leqq 32)$

解答　(1) $x=1$ のとき最大値 8，$x=27$ のとき最小値 -1

(2) $x=4$ のとき最大値 4，$x=32$ のとき最小値 -5

(1) $\log_3 x=t$ とおく。

$1\leqq x\leqq 27$ であるから　底が 1 より大きいので

$\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 27$

すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　……①

y を t の式で表すと　$y=t^2-6t+8=(t-3)^2-1$

① の範囲において，y は

$t=0$ のとき最大値 8，

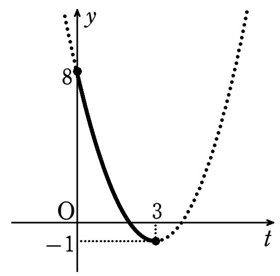
$t=3$ のとき最小値 -1

をとる。

$t=0$ となるのは，$\log_3 x=0$ から　$x=1$

$t=3$ となるのは，$\log_3 x=3$ から　$x=27$

のときである。



したがって，y は，$x=1$ のとき最大値 8，$x=27$ のとき最小値 -1 をとる。

(2) $y=-(\log_2 x)^2+\log_4 x^8=-(\log_2 x)^2+\dfrac{\log_2 x^8}{\log_2 4}=-(\log_2 x)^2+\dfrac{8\log_2 x}{2}$

$=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x$

$\log_2 x=t$ とおく。

$1\leqq x\leqq 32$ であるから　底が 1 より大きいので

$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 32$

すなわち　$0\leqq t\leqq 5$　……①

y を t の式で表すと

$y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

① の範囲において，y は

$t=2$ のとき最大値 4，

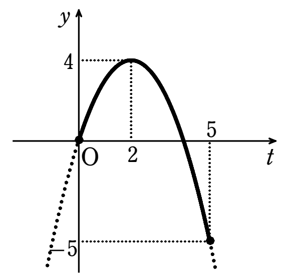
$t=5$ のとき最小値 -5

をとる。

$t=2$ となるのは，$\log_2 x=2$ から　$x=4$

$t=5$ となるのは，$\log_2 x=5$ から　$x=32$

のときである。



したがって，y は，$x=4$ のとき最大値 4，$x=32$ のとき最小値 -5 をとる。

6．次の方程式を解け。

(1) $\log_4(x+3)=\log_4(2x+2)$　　(2) $\log_2(x^2+x-2)=2$

(3) $\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　　(4) $(\log_3 x)^2=\log_{\sqrt{3}} x+3$

(5) $(\log_2 x)^2=\log_2 4x$

解答　(1) $x=1$　(2) $x=2,\ -3$　(3) $x=1$　(4) $x=\dfrac{1}{3},\ 27$　(5) $x=\dfrac{1}{2},\ 4$

(1) 真数は正であるから　$x+3>0$　かつ　$2x+2>0$

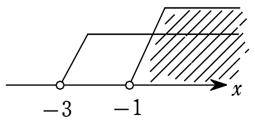
よって　$x>-3$　かつ　$x>-1$

共通範囲より　$x>-1$　……①

方程式から　$x+3=2x+2$

したがって　$x=1$

これは，① を満たすから，解である。



(2)　真数は正であるから　$x^2+x-2>0$

ゆえに　$(x+2)(x-1)>0$

よって　$x<-2,\ 1<x$　……①

方程式から　$x^2+x-2=2^2$

整理して　$x^2+x-6=0$

ゆえに　$(x-2)(x+3)=0$

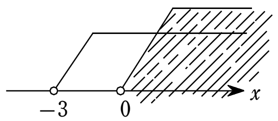
よって　$x=2,\ -3$

これは ① を満たすから，解である。

(3)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$

よって　$x>0$　かつ　$x>-3$

共通範囲より　$x>0$　……①



方程式から　$\log_2 x+\log_2(x+3)=2$

よって　$\log_2 x(x+3)=\log_2 2^2$

ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理して　$x^2+3x-4=0$

よって　$(x-1)(x+4)=0$

したがって　$x=1,\ -4$

① を満たすのは　$x=1$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式から　$(\log_3 x)^2-\log_{\sqrt{3}} x-3=0$

$$(\log_3 x)^2-\frac{\log_3 x}{\log_3\sqrt{3}}-3=0$$

$$(\log_3 x)^2-\frac{\log_3 x}{\frac{1}{2}}-3=0$$

ゆえに　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

因数分解して　$(\log_3 x+1)(\log_3 x-3)=0$

よって　$\log_3 x=-1,\ 3$

したがって　$x=\frac{1}{3},\ 27$　これは①を満たす

(5)　真数は正であるから　$x>0$　……①

方程式は　$(\log_2 x)^2=\log_2 x+\log_2 4$

ゆえに　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-2=0$

よって　$(\log_2 x+1)(\log_2 x-2)=0$

したがって　$\log_2 x=-1,\ 2$

ゆえに　$x=\frac{1}{2},\ 4$　これは①を満たす

7．次の不等式を解け。

(1)　$\log_5(2x+3)<\log_5(x+5)$　　(2)　$2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$

(3)　$(\log_2 x+3)(\log_2 x-1)>0$　　(4)　$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x^3-4\leqq 0$

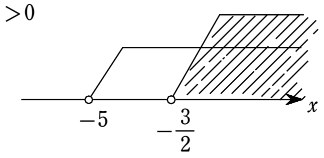
(5)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)$

解答　(1)　$-\frac{3}{2}<x<2$　(2)　$2<x<5$　(3)　$0<x<\frac{1}{8},\ 2<x$

(4)　$\frac{1}{16}\leqq x\leqq 2$　(5)　$-1<x<\frac{2}{3}$

(1)　真数は正であるから　$2x+3>0$ かつ $x+5>0$

よって　$x>-\frac{3}{2}$　かつ　$x>-5$



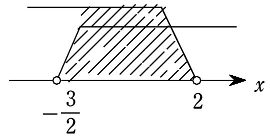
共通範囲より　$x>-\frac{3}{2}$　……①

底 5 は 1 より大きいから，不等式より

$2x+3<x+5$

よって　$x<2$　……②

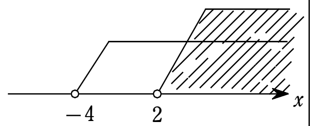
①，② から，解は　$-\frac{3}{2}<x<2$



(2)　真数は正であるから　$x-2>0$ かつ $x+4>0$

よって　$x>2$　かつ　$x>-4$

共通範囲より　$x>2$　……①



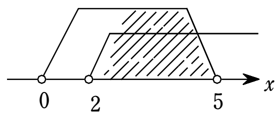
不等式から　$\log_{0.2}(x-2)^2>\log_{0.2}(x+4)$

底 0.2 は 1 より小さいから　$(x-2)^2<x+4$

整理すると　$x^2-5x<0$

よって　$0<x<5$　……②

①，② から，解は　$2<x<5$



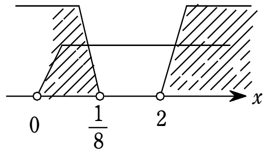
(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_2 x<-3,\ 1<\log_2 x$

よって　$\log_2 x<\log_2\frac{1}{8},\ \log_2 2<\log_2 x$

底 2 は 1 より大きいから　$x<\frac{1}{8},\ 2<x$　……②

①，② から，解は　$0<x<\frac{1}{8},\ 2<x$



(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2-3\log_{\frac{1}{2}}x-4\leqq 0$

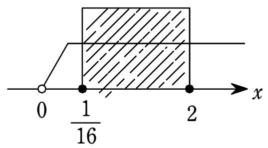
ゆえに　$\left(\log_{\frac{1}{2}}x+1\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}x-4\right)\leqq 0$

よって　$-1\leqq\log_{\frac{1}{2}}x\leqq 4$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}}2\leqq\log_{\frac{1}{2}}x\leqq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$2\geqq x\geqq\frac{1}{16}$

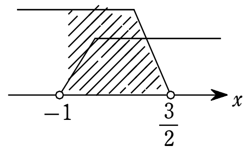
よって　$\frac{1}{16}\leqq x\leqq 2$　……②



①，② から，共通範囲より　解は　$\frac{1}{16}\leqq x\leqq 2$

(5)　真数は正であるから　$x+1>0$ かつ $3-2x>0$

よって　$x>-1$　かつ　$x<\frac{3}{2}$

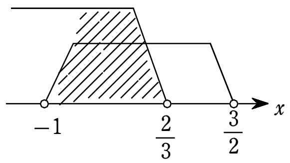


共通範囲より　$-1<x<\frac{3}{2}$　……①

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから，不等式より　$x+1<3-2x$

よって　$x<\frac{2}{3}$　……②

①，② から，共通範囲より　解は　$-1<x<\frac{2}{3}$



8．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\log_4(x-3)=\frac{1}{2}$　　(2)　$\log_2(x+1)>1$　　(3)　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$

解答　(1)　$x=5$　(2)　$x>1$　(3)　$1<x<\frac{4}{3}$

(1)　真数は正であるから　$x-3>0$

したがって　$x>3$

方程式は　$\log_4(x-3)=\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　$x-3=4^{\frac{1}{2}}$　　よって　$x=5$

これは $x>3$ を満たすから，解である。

(2)　真数は正であるから　$x+1>0$

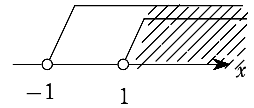
ゆえに　$x>-1$　……①

不等式は　$\log_2(x+1)>\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$x+1>2$

よって　$x>1$　……②

①，② から，共通範囲より，解は　$x>1$



(3)　真数は正であるから　$x-1>0$

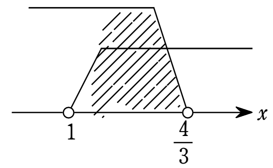
ゆえに　$x>1$　……①

不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1<\frac{1}{3}$

よって　$x<\frac{4}{3}$　……②

①，② から，解は　$1<x<\frac{4}{3}$



9．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の数は何桁の整数か。

(1)　2^{100}　　(2)　3^{40}　　(3)　6^{25}

解答　(1)　31 桁　(2)　20 桁　(3)　20 桁

(1)　$\log_{10}2^{100}=100\log_{10}2=100\times 0.3010=30.10$

ゆえに　$30<\log_{10}2^{100}<31$

すなわち　$\log_{10}10^{30}<\log_{10}2^{100}<\log_{10}10^{31}$

よって　底１０は１より大きいので　$10^{30}<2^{100}<10^{31}$

したがって，2^{100} は 31 桁の数である。

(2)　$\log_{10}3^{40}=40\log_{10}3=40\times 0.4771=19.084$

ゆえに　$19<\log_{10}3^{40}<20$

すなわち　$\log_{10}10^{19}<\log_{10}3^{40}<\log_{10}10^{20}$

よって　底１０は１より大きいので　$10^{19}<3^{40}<10^{20}$

したがって，3^{40} は 20 桁の数である。

(3)　$\log_{10}6^{25}=25(\log_{10}2+\log_{10}3)=25(0.3010+0.4771)=19.4525$

ゆえに　$19<\log_{10}6^{25}<20$

すなわち　$\log_{10}10^{19}<\log_{10}6^{25}<\log_{10}10^{20}$

よって　底１０は１より大きいので　$10^{19}<6^{25}<10^{20}$

したがって，6^{25} は 20 桁の数である。