数学演習（対数関数）Ｈ２１．１０．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

**１**．次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{12}+\log_3\sqrt{8}$

(2)　$(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

(3)　$9^{\log_3 5}$

**２**．$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とするとき，$\log_{75}24$ を$a$，$b$ で表せ。

**３**．　1 でない正の数 $a$，$b$，$c$ と 0 でない数 $x$，$y$，$z$ が $a^x=b^y=c^z$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ を満たすとき，$a$，$b$，$c$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

**４**．関数 $y=\log_2(x+1)$ のグラフをかき，関数 $y=\log_2 x$ のグラフとの位置関係を述べよ。

**５**．次の３数の大小を不等号を用いて表せ。　$\log_2 3$，$\log_3 2$，$\log_4 8$

**６**．次の方程式を解け。

(1)　$\log_2(x+1)+\log_2 x=1$

(2)　$\log_2(x^2-3x-10)=\log_2(x-2)+1$

(3)　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

(4)　$\log_2 x-2\log_x 4=3$

7．次の不等式を解け。

(1)　$\log_2(x+3)<3$　　(2)　$2\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$

(3)　$(\log_3 x)^2+\log_9 x^2-6\geqq 0$

8．関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最大値，最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ。

9．$x\geqq 3$，$y\geqq \dfrac{1}{3}$，$xy=27$ のとき，$(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値とそのときの $x$，$y$ の値を求めよ。

10. $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき

(1)　$2^{32}$ は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50}$ は，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

11. $8^{44}$ について，一の位の数字は $^{ア}\boxed{\phantom{00}}$ であり，最高位の数字は $^{イ}\boxed{\phantom{00}}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

**１**．次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{12}+\log_3\sqrt{8}$

(2) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

(3) $9^{\log_3 5}$

解答　(1) $-\frac{1}{2}$　(2) $\frac{35}{3}$　(3) 25

(1) [解法1]　$(与式)=\log_3\frac{1}{\sqrt{2}}-\log_3 2\sqrt{3}+\log_3 2\sqrt{2}$

$$=\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\times 2\sqrt{2}\right)$$

$$=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=\log_3 3^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

[解法2]　$(与式)=\frac{1}{2}\log_3 2^{-1}-\frac{3}{2}\log_3(2^2\cdot 3)^{\frac{1}{3}}+\log_3 2^{\frac{3}{2}}$

$$=-\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}(2\log_3 2+1)+\frac{3}{2}\log_3 2=-\frac{1}{2}$$

(2) $(与式)=\left(\log_2 9+\frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\frac{\log_2 16}{\log_2 3}+\frac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$$=\left(2\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\frac{4}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2 3}\right)$$

$$=\frac{7}{3}\log_2 3\cdot\frac{5}{\log_2 3}=\frac{35}{3}$$

(3) $9^{\log_3 5}=M$ とおく。

左辺は正であるから，両辺の 3 を底とする対数をとると　$\log_3 9^{\log_3 5}=\log_3 M$

ゆえに　$\log_3 5\log_3 9=\log_3 M$　すなわち　$2\log_3 5=\log_3 M$

よって　$M=5^2$　　したがって　$9^{\log_3 5}=25$

別解　$9^{\log_3 5}=(3^2)^{\log_3 5}=3^{2\log_3 5}=3^{\log_3 5^2}=3^{\log_3 25}=25$

**２**．$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とするとき，$\log_{75}24$ を$a$，$b$ で表せ。

解答　$\frac{3a+b}{-2a+b+2}$

$$\log_{75}24=\frac{\log_{10}24}{\log_{10}75}=\frac{\log_{10}(2^3\cdot 3)}{\log_{10}(3\cdot 5^2)}=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2\log_{10}5}$$

$$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2\log_{10}\frac{10}{2}}=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2(1-\log_{10}2)}$$

$$=\frac{3a+b}{-2a+b+2}$$

**３**．1 でない正の数 $a$，$b$，$c$ と 0 でない数 $x$，$y$，$z$ が $a^x=b^y=c^z$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ を満たすとき，$a$，$b$，$c$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

解答　$ab=c$

$a^x=b^y=c^z$ の各辺は正であるから，各辺の $c$ を底とする対数をとると

$x\log_c a=y\log_c b=z$　すなわち　$x\log_c a=z$，$y\log_c b=z$

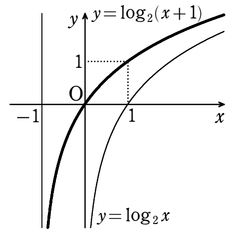
$x\neq 0$，$y\neq 0$，$z\neq 0$ であるから　$\frac{1}{x}=\frac{\log_c a}{z}$，$\frac{1}{y}=\frac{\log_c b}{z}$

ゆえに　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}(\log_c a+\log_c b)=\frac{\log_c ab}{z}=\frac{1}{z}$

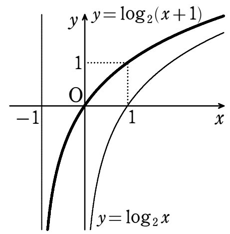
よって　$\log_c ab=1$　　したがって　$ab=c$

**４**．関数 $y=\log_2(x+1)$ のグラフをかき，関数 $y=\log_2 x$ のグラフとの位置関係を述べよ。

解答　$x$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したもの　[図]




$y=\log_2(x+1)$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを $x$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したものである。[図]




**５**．次の３数の大小を不等号を用いて表せ。　$\log_2 3$，$\log_3 2$，$\log_4 8$

解答　$\log_3 2<\log_4 8<\log_2 3$

$\log_2 3>1$，$\log_3 2<1$，$\log_4 8>1$ であるから

$\log_2 3>\log_3 2$，$\log_4 8>\log_3 2$　……①

よって，$\log_2 3$ と $\log_4 8$ の大小を比較すればよい。

$P=\log_2 3-\log_4 8$ とすると

$$P=\log_2 3-\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\log_2 3-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(2\log_2 3-3)$$

$$=\frac{1}{2}(\log_2 3^2-\log_2 2^3)=\frac{1}{2}(\log_2 9-\log_2 8)$$

底 2 は 1 より大きいから　$\log_2 8<\log_2 9$

よって　$P>0$　　すなわち　$\log_4 8<\log_2 3$

これと ① から　$\log_3 2<\log_4 8<\log_2 3$

**６**．次の方程式を解け。

(1) $\log_2(x+1)+\log_2 x=1$　　(2) $\log_2(x^2-3x-10)=\log_2(x-2)+1$

(3) $(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$　　(4) $\log_2 x-2\log_x 4=3$

解答　(1) $x=1$　(2) $x=6$　(3) $x=\frac{1}{3}$，27　(4) $x=\frac{1}{2}$，16

(1) 真数は正であるから　$x+1>0$　かつ　$x>0$

共通範囲をとって　$x>0$　……①

与式を変形して　$\log_2(x+1)x=1$

よって　$(x+1)x=2$　　整理して　$x^2+x-2=0$

ゆえに　$(x-1)(x+2)=0$　　① から　$x=1$

(2) 真数は正であるから　$x^2-3x-10>0$　かつ　$x-2>0$

よって　$(x+2)(x-5)>0$　かつ　$x>2$

共通範囲をとって　$x>5$　……①

与式から　$\log_2(x^2-3x-10)=\log_2 2(x-2)$　より

$x^2-3x-10=2x-4$　　整理して　$x^2-5x-6=0$

よって　$(x+1)(x-6)=0$　　① から　$x=6$

(3) $\log_3 x=X$ とおくと　$X^2-2X-3=0$

よって　$(X+1)(X-3)=0$

ゆえに　$X=-1$，3　　すなわち　$\log_3 x=-1$，3

したがって　$x=3^{-1}$，$3^3$　　すなわち　$x=\frac{1}{3}$，27

(4) 対数の真数，底の条件から　$x>0$　かつ　$x\neq 1$　……①

$\log_x 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 x}=\frac{2}{\log_2 x}$ であるから，与えられた方程式は

$\log_2 x-\frac{4}{\log_2 x}=3$　　よって　$(\log_2 x)^2-4=3\log_2 x$

整理して　$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4=0$

ゆえに　$(\log_2 x+1)(\log_2 x-4)=0$　　よって　$\log_2 x=-1$，4

したがって　$x=2^{-1}$，$2^4$　　すなわち　$x=\frac{1}{2}$，16

これらは ① を満たすから，求める解である。

**7**. 次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x+3)<3$　　(2) $2\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$

(3) $(\log_3 x)^2+\log_9 x^2-6\geqq 0$

解答 (1) $-3<x<5$　(2) $x>3$　(3) $0<x\leqq\dfrac{1}{27}$，$9\leqq x$

(1) 真数は正であるから　$x+3>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_2(x+3)<\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x+3<8$ …… ②

①，② から　$x>-3$ かつ $x<5$　よって　$-3<x<5$

(2) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $2x+3>0$　ゆえに　$x>0$ …… ①

不等式を変形して　$\log_{\frac{1}{3}}x^2<\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x^2>2x+3$　よって　$(x+1)(x-3)>0$

ゆえに　$x<-1$，$3<x$ …… ②　①，② から　$x>3$

(3) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

$\log_9 x^2=\dfrac{\log_3 x^2}{\log_3 9}=\dfrac{2\log_3 x}{2}=\log_3 x$ であるから，不等式は

$(\log_3 x)^2+\log_3 x-6\geqq 0$　よって　$(\log_3 x+3)(\log_3 x-2)\geqq 0$

ゆえに　$\log_3 x\leqq -3$，$2\leqq\log_3 x$

すなわち　$\log_3 x\leqq\log_3 3^{-3}$，$\log_3 3^2\leqq\log_3 x$

底 3 は 1 より大きいから　$x\leqq 3^{-3}$，$3^2\leqq x$　すなわち　$x\leqq\dfrac{1}{27}$，$9\leqq x$ …… ②

①，② から　$0<x\leqq\dfrac{1}{27}$，$9\leqq x$

**8**. 関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最大値，最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ。

解答 $x=8$ で最大値 3，$x=2$ で最小値 $-1$

底 2 は 1 より大きいから，$1\leqq x\leqq 8$ のとき　$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 8$

$\log_2 x=t$ とおくと　$0\leqq t\leqq 3$ …… ①

与えられた関数の式を変形すると　$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x$

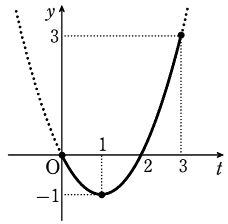
よって，$y$ を $t$ で表すと

$y=t^2-2t=(t-1)^2-1$

① の範囲において，$y$ は

$t=3$ で最大値 3，$t=1$ で最小値 $-1$

をとる。




$\log_2 x=t$ より，$x=2^t$ であるから

$t=3$ のとき $x=2^3=8$，$t=1$ のとき $x=2^1=2$

したがって，$y$ は

$x=8$ で最大値 3，$x=2$ で最小値 $-1$

をとる。

**9**. $x\geqq 3$，$y\geqq\dfrac{1}{3}$，$xy=27$ のとき，$(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値とそのときの $x$，$y$ の値を求めよ。

解答 $x=y=3\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$；$x=81$，$y=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $-4$

$x\geqq 3$，$y\geqq\dfrac{1}{3}$，$xy=27$ の各辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 x\geqq 1$，$\log_3 y\geqq -1$，$\log_3 x+\log_3 y=3$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおくと

$X\geqq 1$，$Y\geqq -1$，$X+Y=3$

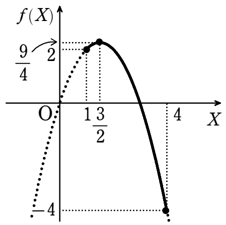
$X+Y=3$ から　$Y=3-X$ …… ①

$Y\geqq -1$ であるから　$3-X\geqq -1$　ゆえに　$X\leqq 4$

$X\geqq 1$ と合わせて　$1\leqq X\leqq 4$ …… ②

また　$(\log_3 x)(\log_3 y)=XY=X(3-X)=-X^2+3X$

$=-\left(X-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$




これを $f(X)$ とすると，② の範囲において，$f(X)$ は

$X=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$，$X=4$ で最小値 $-4$ をとる。

① から　$X=\dfrac{3}{2}$ のとき　$Y=\dfrac{3}{2}$，

$X=4$ のとき　$Y=-1$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ より，$x=3^X$，$y=3^Y$ であるから

$x=y=3\sqrt{3}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$；$x=81$，$y=\dfrac{1}{3}$ で最小値 $-4$

**10**. $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき

(1) $2^{32}$ は何桁の整数か。

(2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50}$ は，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答 (1) 10桁　(2) 小数第 9 位

(1) $\log_{10}2^{32}=32\log_{10}2=32\times 0.3010=9.632$

よって　$9<\log_{10}2^{32}<10$　ゆえに　$10^9<2^{32}<10^{10}$

したがって，$2^{32}$ は 10 桁の整数である。

(2) $\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50}=50\log_{10}\dfrac{2}{3}=50(\log_{10}2-\log_{10}3)$

$=50\times(0.3010-0.4771)=-8.805$

よって　$-9<\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50}<-8$　ゆえに　$10^{-9}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50}<10^{-8}$

したがって，小数第 9 位に初めて 0 でない数字が現れる。

**11**. $8^{44}$ について，一の位の数字は ア $\boxed{\phantom{0}}$ であり，最高位の数字は イ $\boxed{\phantom{0}}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答 (ア) 6　(イ) 5

(ア) $8^1$，$8^2$，$8^3$，$8^4$，$8^5$，…… の一の位の数字は順に

8，4，2，6，8，……

よって，4 つの数字の列 8，4，2，6 が繰り返し現れる。

$44=4\times 11$ であるから，$8^{44}$ の一の位の数字は　6

(イ) $\log_{10}8^{44}=44\log_{10}2^3=44\cdot 3\log_{10}2=39.732$ から

$39<\log_{10}8^{44}<40$　よって　$10^{39}<8^{44}<10^{40}$

ゆえに，$8^{44}$ は 40 桁の自然数である。

ここで，$\log_{10}8^{44}$ の小数部分 0.732 に注目すると

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\cdot 3)=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$

であることから，0.732 は$\log_{10}5$ と $\log_{10}6$ の間である。

ゆえに

$\log_{10}5<0.732<\log_{10}6$

すべてに３９を加えて

$39+\log_{10}5<39.732<39+\log_{10}6$

つまり

$\log_{10}(5\times 10^{39})<\log_{10}8^{44}<\log_{10}(6\times 10^{39})$

すなわち

$5\times 10^{39}<8^{44}<6\times 10^{44}$

が成り立ち，これは$8^{44}$ の最高位が５であることを意味する。