数学演習（対数関数）Ｈ２１．３．３　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

**１**. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_5\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_5\dfrac{25}{12}-\dfrac{3}{2}\log_5\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$

(2) $\log_2 10\cdot\log_5 10-(\log_2 5+\log_5 2)$

(3) $10^{1-2\log_{10}3}$

**２**. $\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$ のとき，$\log_{20}80$ を $a$, $b$ で表せ。

**３**. $xyz\fallingdotseq 0$, $2^x=5^y=10^{\frac{z}{2}}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}$ の値を求めよ。

**４**. 次の方程式･不等式を解け。ただし，$a>0$, $a\fallingdotseq 1$ とする。

(1) $2^x=3^{2x-1}$

(2) $\log_a(x-3)=\log_{a^2}(x-1)$

(3) $x^{\log_2 x}=\dfrac{x^5}{64}$

(4) $\log_3(x^3+2)=2\log_3 x+1$

(5) $2\log_a(x-1)<\log_a(7-x)$

(6) $\log_2 x-2\log_x 4\geqq 3$

(7) $\begin{cases} x^2y^4=1 \\ \log_2 x+(\log_2 y)^2=3 \end{cases}$

5．次の関数の最大値･最小値があれば，それを求めよ。　$y=\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)\left(\log_2\dfrac{x}{2}\right)$

6．$x$ の２次方程式 $x^2-4x\log_2 a+4\log_2 a^2+32=0$ が異なる２つの実数解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

7．Ａ町の人口は近年減少傾向にある。現在のこの町の人口は前年同時期の人口に比べて４％減少したという。毎年この比率で減少すると仮定した場合，初めて人口が現在の半分以下になるのは何年後か。答えは整数で答えよ。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$ , $\log_{10}3=0.4771$ とする。

8．$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{70}$ は，小数第何位に初めて０でない数字が現れるか求めよ。また，その数字は何か答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ , $\log_{10}3=0.4771$ , $\log_{10}7=0.8451$ とする。

1．次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_5\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_5\frac{25}{12}-\frac{3}{2}\log_5\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

与式 $=\log_5\sqrt{2}+\log_5\sqrt{\frac{25}{12}}+\log_5(\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}$

$=\log_5\left(\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{25}{12}}\times\sqrt{6}\right)=\log_5 5=1$

別解　与式 $=\frac{1}{2}\log_5 2+\frac{1}{2}\log_5\frac{5^2}{2^2\times3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\log_5(2\times3)$

$=\frac{1}{2}\log_5 2+\frac{1}{2}(2\log_5 5-2\log_5 2-\log_5 3)+\frac{1}{2}(\log_5 2+\log_5 3)$

$=\log_5 5=1$

(2) $\log_2 10\cdot\log_5 10-(\log_2 5+\log_5 2)$

底を2にそろえる

$\log_2 10\times\frac{\log_2 10}{\log_2 5}-\log_2 5-\frac{\log_2 2}{\log_2 5}$

$=\frac{(\log_2 10)^2}{\log_2 5}-\log_2 5-\frac{1}{\log_2 5}$

$=\frac{(\log_2 5+1)^2}{\log_2 5}-\log_2 5-\frac{1}{\log_2 5}$

$=\frac{(\log_2 5)^2+2\log_2 5+1}{\log_2 5}-\log_2 5-\frac{1}{\log_2 5}$

$=\log_2 5+2+\frac{1}{\log_2 5}-\log_2 5-\frac{1}{\log_2 5}$

$=2$

(3) $10^{1-2\log_{10}3}$

$10^{1-2\log_{10}3}=M$ とおく。

両辺、底10の対数をとると

$\log_{10}10^{1-2\log_{10}3}=\log_{10}M$

$(1-2\log_{10}3)\log_{10}10=\log_{10}M$

$1-2\log_{10}3=\log_{10}M$

$\log_{10}10-\log_{10}3^2=\log_{10}M$

$\log_{10}\frac{10}{9}=\log_{10}M$

∴ $M=\frac{10}{9}$

2．$\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$ のとき，$\log_{20}80$ を $a$，$b$ で表せ。

$$\log_{20}80=\frac{\log_2 80}{\log_2 20}=\frac{\log_2(2^4\times5)}{\log_2(2^2\times5)}=\frac{4\log_2 2+\log_2 5}{2\log_2 2+\log_2 5}=\frac{4+\log_2 5}{2+\log_2 5}$$

ここで　$\log_2 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 5=ab$

よって　$\log_{20}80=\frac{4+ab}{2+ab}$

3．$xyz\neq0$，$2^x=5^y=10^{\frac{z}{2}}$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ の値を求めよ。

$2^x=5^y=10^{\frac{z}{2}}$ の各辺は正の数であるから，2を底とする対数をとると

$$x=y\log_2 5=\frac{z}{2}\log_2 10$$

この式の値を $k$ とおくと，$x\neq0$ であるから　$k\neq0$

$x=k$ から　$\frac{1}{x}=\frac{1}{k}$　　$y\log_2 5=k$ から　$\frac{1}{y}=\frac{\log_2 5}{k}$

$\frac{z}{2}\log_2 10=k$ から　$\frac{2}{z}=\frac{\log_2 10}{k}$

したがって　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\frac{1}{k}+\frac{\log_2 5}{k}-\frac{\log_2 10}{k}$

$=\frac{1+\log_2 5-(1+\log_2 5)}{k}=0$

4．次の方程式・不等式を解け。ただし $a>0$，$a\neq1$ とする。

(1) $2^x=3^{2x-1}$

両辺底2の対数をとると

$\log_2 2^x=\log_2 3^{2x-1}$

∴ $x=(2x-1)\log_2 3$

$x=(2\log_2 3)\times x-\log_2 3$

xについて解くと

$(2\log_2 3)x-x=\log_2 3$

$x(2\log_2 3-1)=\log_2 3$

∴ $x=\frac{\log_2 3}{2\log_2 3-1}$

(2) $\log_a(x-3)=\log_{a^2}(x-1)$

真数 $x-3>0$，$x-1>0$

∴ 共通部分より

$x>3$ ①

また

$\log_a(x-3)=\frac{\log_a(x-1)}{\log_a a^2}$

∴ $\log_a(x-3)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)$

$2\log_a(x-3)=\log_a(x-1)$

$\log_a(x-3)^2=\log_a(x-1)$

∴ $(x-3)^2=x-1$

$x^2-6x+9=x-1$

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

∴ $x=2, 5$

①より $x>3$

よって $x=2$ は不適

ゆえに $x=5$

(3) $x^{\log_2 x}=\frac{x^5}{64}$

両辺底2の対数をとると

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\frac{x^5}{64}$

$\log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2 x^5-\log_2 64$

$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$

∴ $\log_2 x=2, 3$

真数>0より $x>0$

∴ $x=2^2, 2^3$

より $x=4, 8$

(4) $\log_3(\overset{x^3+2}{\cancel{3x^3+2}})=2\log_3 x+1$

真数>0より $x^3+2>0$，$x>0$

与式より

$\log_3(x^3+2)=\log_3 x^2+1$

∴ $\log_3(x^3+2)=\log_3 3x^2$

∴ $x^3+2=3x^2$

$x^3-3x^2+2=0$

ここで（左辺）に $x=1$ を代入すると

$1^3-3\times1^2+2=0$ より

（左辺）は $x-1$ で割り切れる

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

∴（左辺）$=(x-1)(x^2-2x-2)$

より $(x-1)(x^2-2x-2)=0$

∴ $x=1, 1\pm\sqrt{3}$

$x=1$ は $x^3+2>0$，$x>0$ を満たす

$x=1-\sqrt{3}$ は $x>0$ を満たさない

$x=1+\sqrt{3}$ は $x>0$，$x^3+2>0$ を満たす

∴ $x=1, 1+\sqrt{3}$

(5) $2\log_a(x-1) < \log_a(7-x)$

底 $a$ より $a \neq 1$, $a>0$.

また、真数 $>0$ より $x-1>0$, $7-x>0$

∴ $1<x<7$ ……①

また、

$\log_a(x-1)^2 < \log_a(7-x)$

・$0<a<1$ の時.

$(x-1)^2 > 7-x$

$x^2-x-6>0$

$(x-3)(x+2)>0$

∴ $x<-2$, $x>3$

①より $3<x<7$

・$a>1$ の時.

$(x-1)^2 < 7-x$

$x^2-x-6<0$

$(x-3)(x+2)<0$

∴ $-2<x<3$

①より $1<x<3$

以上より

$0<a<1$ の時 $3<x<7$

$a>1$ の時 $1<x<3$

(6) $\log_2 x - 2\log_x 4 \geqq 3$

底に $x$ があるので、$x \neq 1$, $x>0$ である

また、$\log_2 x - \dfrac{2\log_2 4}{\log_2 x} \geqq 3$.

・$\log_2 x > 0$, つまり $x>1$ の時.

$(\log_2 x)^2 - 4 \geqq 3\log_2 x$

$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 \geqq 0$

$(\log_2 x - 4)(\log_2 x + 1) \geqq 0$

∴ $\log_2 x \leqq -1$, $\log_2 x \geqq 4$.

ここで $\log_2 x > 0$ より $\log_2 x \geqq 4$.

真数 $x>0$ より $x \geqq 16$.

・$\log_2 x < 0$, つまり $0<x<1$ の時

$(\log_2 x)^2 - 4 \leqq 3\log_2 x$

$(\log_2 x - 4)(\log_2 x + 1) \leqq 0$

∴ $-1 \leqq \log_2 x \leqq 4$

$\log_2 x < 0$ より

$-1 \leqq \log_2 x < 0$.

真数 $x>0$ より

$\frac{1}{2} \leqq x < 1$.

以上より

$\frac{1}{2} \leqq x < 1$, $x \geqq 16$

(7) $\begin{cases} x^2y^4=1 \\ \log_2 x + (\log_2 y)^2 = 3 \end{cases}$

$x^2y^4=1$.

両辺2を底とする対数をとって

$\log_2 x^2y^4 = \log_2 1$

∴ $2\log_2 x + 4\log_2 y = 0$.

∴ $\log_2 x = -2\log_2 y$.

これを

$\log_2 x + (\log_2 y)^2 = 3$

に代入して

$-2\log_2 y + (\log_2 y)^2 = 3$

$(\log_2 y)^2 - 2\log_2 y - 3 = 0$.

$(\log_2 y - 3)(\log_2 y + 1) = 0$

∴ $\log_2 y = 3, -1$

真数正より $x>0$, $y>0$.

よって $y = 8, \frac{1}{2}$

$\log_2 x + (\log_2 y)^2 = 3$ より

$y=8$ の時 $\log_2 x = -6$ ∴ $x = \frac{1}{64}$

$y=\frac{1}{2}$ の時 $\log_2 x = 2$ ∴ $x = 4$

以上より

$(x, y) = \left(\frac{1}{64}, 8\right), \left(4, \frac{1}{2}\right)$

5．次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。 $y=\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)\left(\log_2\dfrac{x}{2}\right)$

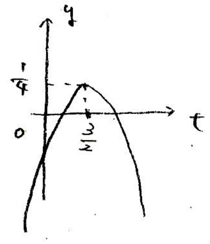
$y=(\log_2 4-\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 2)=(2-\log_2 x)(\log_2 x-1)$

$\log_2 x = t$ とおくと $t$ はすべての実数をとる

$$y=(2-t)(t-1)=-t^2+3t-2=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

したがって，$y$ は $t=\frac{3}{2}$ すなわち $x=2\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

また、最小値はなし



6．$x$ の2次方程式 $x^2-4x\log_2 a+4\log_2 a^2+32=0$ が異なる2つの実数解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

真数は正であるから　$a>0$, $a^2>0$　よって　$a>0$ ……①

与えられた方程式について

$$\frac{D}{4}=(-2\log_2 a)^2-(4\log_2 a^2+32)$$

$$=4\{(\log_2 a)^2-2\log_2 a-8\}=4(\log_2 a+2)(\log_2 a-4)$$

方程式が異なる2つの実数解をもつための条件は

$D>0$　すなわち　$(\log_2 a+2)(\log_2 a-4)>0$

よって　$\log_2 a<-2$, $4<\log_2 a$

ゆえに　$\log_2 a<\log_2\frac{1}{4}$, $\log_2 16<\log_2 a$

底2は1より大きいから　$a<\frac{1}{4}$, $16<a$ ……②

①，②から，求める $a$ の値の範囲は　$0<a<\frac{1}{4}$, $16<a$

7．A町の人口は近年減少傾向にある。現在のこの町の人口は前年同時期の人口と比べて4％減少したという。毎年この比率で減少すると仮定した場合，初めて人口が現在の半分以下になるのは何年後か。答えは整数で求めよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\left(\frac{96}{100}\right)^n \leqq \frac{1}{2}$ を満たす最小の整数 $n$ を求めればよい。

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}\frac{2^5\times 3}{10^2} \leqq \log_{10}\frac{1}{2}$

ゆえに　$n(5\log_{10}2+\log_{10}3-2) \leqq -\log_{10}2$

よって　$n(5\times 0.3010+0.4771-2) \leqq -0.3010$

ゆえに　$n(-0.0179) \leqq -0.3010$　したがって　$n \geqq \frac{0.3010}{0.0179}=16.8\cdots\cdots$

これを満たす最小の整数 $n$ は　17

よって，初めて人口が現在の半分以下になるのは17年後である。

8．$\left(\frac{3}{5}\right)^{70}$ は，小数第何位に初めて0でない数字が現れるか求めよ。また，その数字は何か答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}7=0.8451$ とする。

$\log_{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{70} = 70\log_{10}\frac{3}{5} = 70(\log_{10}3-\log_{10}5)$

ここで $\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1-\log_{10}2 = 1-0.3010 = 0.6990$

∴ $70(\log_{10}3-\log_{10}5) = 70(0.4771-0.6990)$

$= 70\times(-0.2219) = -15.533$

よって $-16 < -15.533 < -15$

∴ $10^{-16} < \left(\frac{3}{5}\right)^{70} < 10^{-15}$ より

$\left(\frac{3}{5}\right)^{70}$ は小数第16位に初めて0でない数字が現れる

また、$(-15.533)-(-16) = 0.467$

ここで、$\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ より

$\log_{10}2 < 0.467 < \log_{10}3$.

上式のすべてに$(-16)$を加えると

$-16+\log_{10}2 < -15.533 < -16+\log_{10}3$

∴ $2\times 10^{-16} < \left(\frac{3}{5}\right)^{70} < 3\times 10^{-16}$

よって小数第16位に現れる数字は2