数学演習（対数関数）Ｈ２３．６．２２　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{12}+\log_3\sqrt{8}$

(2) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

2．(1) $9^{\log_3 5}$ の値を求めよ。

(2) $\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$ のとき，$\log_2 10$ と $\log_{15} 40$ を a，b で表せ。

3．関数 $y=\log_4(4x-8)$ のグラフをかけ。また，関数 $y=\log_4 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

4．次の各組の数の大小を比較せよ。　1.5，$\log_3 5$

5．$1\leqq x\leqq 8$ のとき，関数 $y=(\log_2 x)^2+8\log_{\frac{1}{4}}2x+\log_2 32$ の最大値と最小値を求めよ。

6．次の方程式を解け。

(1) $\log_3 x+\log_3(x-2)=1$

(2) $\log_2(x+2)=\log_4(5x+16)$

(3) $\log_2 x+6\log_x 2=5$

7．次の不等式を解け。

(1)　$\log_{0.3}(2-x) \geqq \log_{0.3}(3x+14)$　　(2)　$\log_2(x-2) < 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(3)　$(\log_2 x)^2 - \log_2 4x > 0$　　(4)　$2^x > 3^{x-1}$

8．(1)　不等式 $\log_a(3x^2-3x-18) > \log_a(2x^2-10x)$ を解け。ただし，$a \fallingdotseq 1$，$a > 0$ とする。

(2)　不等式 $\log_2 x - 6\log_x 2 \geqq 1$ を解け。

9．$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。0.3^{100} は小数第 イ $\boxed{}$ 位に初めて0でない数字が現れる。

10．自然数 $N = 7^{777}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，次の値(小数第5位を四捨五入したもの)を用いてもよい。

$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$，$\log_{10}7 = 0.8451$

(1)　N は何桁の数か。　　(2)　N の先頭の数字は何か。

(3)　N の末尾の数字は何か。

1．次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{12}+\log_3\sqrt{8}$

(2) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

解答　(1) $-\frac{1}{2}$　(2) $\frac{35}{3}$

解説

(1) [解法1]　(与式) $=\log_3\frac{1}{\sqrt{2}}-\log_3 2\sqrt{3}+\log_3 2\sqrt{2}$

$$=\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\times 2\sqrt{2}\right)$$

$$=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=\log_3 3^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

[解法2]　(与式) $=\frac{1}{2}\log_3 2^{-1}-\frac{3}{2}\log_3(2^2\cdot 3)^{\frac{1}{3}}+\log_3 2^{\frac{3}{2}}$

$$=-\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}(2\log_3 2+1)+\frac{3}{2}\log_3 2=-\frac{1}{2}$$

(2) (与式) $=\left(\log_2 9+\frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\frac{\log_2 16}{\log_2 3}+\frac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$$=\left(2\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\frac{4}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2 3}\right)$$

$$=\frac{7}{3}\log_2 3\cdot\frac{5}{\log_2 3}=\frac{35}{3}$$

2．(1) $9^{\log_3 5}$ の値を求めよ。

(2) $\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$ のとき，$\log_2 10$ と $\log_{15} 40$ を a，b で表せ。

解答　(1) 25　(2) $\log_2 10=1+ab$，$\log_{15} 40=\frac{ab+3}{a(b+1)}$

解説

(1) $9^{\log_3 5}=M$ とおく。

左辺は正であるから，両辺の 3 を底とする対数をとると　$\log_3 9^{\log_3 5}=\log_3 M$

ゆえに　$\log_3 5\log_3 9=\log_3 M$　すなわち　$2\log_3 5=\log_3 M$

よって　$M=5^2$　　したがって　$9^{\log_3 5}=25$

別解　$9^{\log_3 5}=(3^2)^{\log_3 5}=3^{2\log_3 5}=3^{\log_3 5^2}=3^{\log_3 25}=25$

(2) $\log_2 10=\log_2(2\cdot 5)=\log_2 2+\log_2 5=1+\log_2 5$

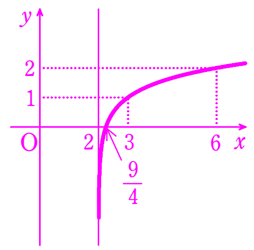
ここで　$\log_2 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 5=ab$

よって　$\log_2 10=1+ab$

また　$\log_{15} 40=\frac{\log_2 40}{\log_2 15}=\frac{\log_2(5\cdot 2^3)}{\log_2(3\cdot 5)}=\frac{\log_2 5+3}{\log_2 3+\log_2 5}=\frac{ab+3}{a+ab}=\frac{ab+3}{a(b+1)}$

3．関数 $y=\log_4(4x-8)$ のグラフをかけ。また，関数 $y=\log_4 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

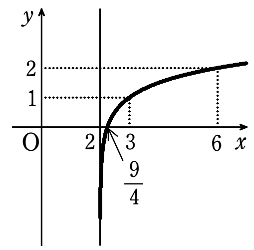
解答　[図] $y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの



解説

$y=\log_4(4x-8)=\log_4 4(x-2)=\log_4(x-2)+1$

よって，求めるグラフは，$y=\log_4 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，下図



4．次の各組の数の大小を比較せよ。　1.5，$\log_3 5$

解答　$1.5>\log_3 5$

解説

$1.5=\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\log_3 3=\log_3 3^{\frac{3}{2}}$　　また　$\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2=3^3=27>5^2$

底 3 は 1 より大きく，$3^{\frac{3}{2}}>5$ であるから　$\log_3 3^{\frac{3}{2}}>\log_3 5$

したがって　$1.5>\log_3 5$

5．$1\leqq x\leqq 8$ のとき，関数 $y=(\log_2 x)^2+8\log_{\frac{1}{4}} 2x+\log_2 32$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=1$ で最大値 1，$x=4$ で最小値 -3

解説

$\log_2 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$ であるから

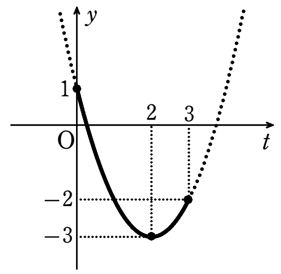
$\log_2 1\leqq t\leqq\log_2 8$　すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　…… ①

また　$\log_{\frac{1}{4}} 2x=\frac{\log_2 2x}{\log_2\frac{1}{4}}=\frac{\log_2 2+\log_2 x}{-2}=-\frac{t+1}{2}$，$\log_2 32=\log_2 2^5=5$

であるから，y を t の式で表すと

$$y=t^2+8\cdot\left(-\frac{t+1}{2}\right)+5=t^2-4t+1$$

$$=(t-2)^2-3$$



① の範囲において，y は

$t=0$ で最大値 1，$t=2$ で最小値 -3

をとる。

$t=\log_2 x$ より，$x=2^t$ であるから

$t=0$ のとき　$x=2^0=1$，　$t=2$ のとき　$x=2^2=4$

したがって，この関数は $x=1$ で最大値 1，$x=4$ で最小値 -3 をとる。

6．次の方程式を解け。

(1) $\log_3 x+\log_3(x-2)=1$　　(2) $\log_2(x+2)=\log_4(5x+16)$

(3) $\log_2 x+6\log_x 2=5$

解答　(1) $x=3$　(2) $x=4$　(3) $x=4$，8

解説

(1) 真数は正であるから，$x>0$ かつ $x-2>0$ より　$x>2$

方程式から　$\log_3 x(x-2)=\log_3 3$

したがって　$x(x-2)=3$　　整理して　$x^2-2x-3=0$

ゆえに　$(x+1)(x-3)=0$　　よって　$x=-1$，3

$x>2$ であるから，解は　$x=3$

(2) 真数は正であるから，$x+2>0$ かつ $5x+16>0$ より　$x>-2$

$\log_4(5x+16)=\frac{\log_2(5x+16)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(5x+16)$ であるから，方程式は

$$\log_2(x+2)^2=\log_2(5x+16)$$

したがって　$(x+2)^2=5x+16$　　整理して　$x^2-x-12=0$

ゆえに　$(x+3)(x-4)=0$　　よって　$x=-3$，4

$x>-2$ であるから，解は　$x=4$

(3) 真数は正で，底は 1 でない正の数であるから　$0<x<1$，$1<x$　…… ①

よって　$\log_2 x\neqq 0$

方程式の両辺に $\log_2 x$ を掛けて　$(\log_2 x)^2+6=5\log_2 x$

整理して　$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

ゆえに　$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$　　よって　$\log_2 x=2$，3

$\log_2 x=2$ から　$x=4$，　$\log_2 x=3$ から　$x=8$

これらは ① を満たす。

したがって，解は　$x=4$，8

7．次の不等式を解け。

(1)　$\log_{0.3}(2-x) \geqq \log_{0.3}(3x+14)$　　(2)　$\log_2(x-2) < 1+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(3)　$(\log_2 x)^2-\log_2 4x>0$　　(4)　$2^x>3^{x-1}$

解答　(1)　$-3 \leqq x<2$　(2)　$4<x<3+\sqrt{3}$　(3)　$0<x<\frac{1}{2}$，$4<x$

(4)　$x<\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}$

解説

(1)　真数は正であるから，$2-x>0$ かつ $3x+14>0$ より　$-\frac{14}{3}<x<2$　…… ①

底 0.3 は 1 より小さいから，不等式より　$2-x \leqq 3x+14$

よって　$x \geqq -3$　…… ②

①，② から，解は　$-3 \leqq x<2$

(2)　真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $x-4>0$ より　$x>4$

$1=\log_2 2$，$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=-\log_2(x-4)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-2)<\log_2 2-\log_2(x-4)$$

ゆえに　$\log_2(x-2)+\log_2(x-4)<\log_2 2$

よって　$\log_2(x-2)(x-4)<\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x-2)(x-4)<2$

ゆえに　$x^2-6x+6<0$　　よって　$3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3}$

$x>4$ との共通範囲を求めて　$4<x<3+\sqrt{3}$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　…… ①

$\log_2 4x=2+\log_2 x$ であるから，不等式は　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-2>0$

ゆえに　$(\log_2 x+1)(\log_2 x-2)>0$

よって　$\log_2 x<-1$，$2<\log_2 x$

したがって　$\log_2 x<\log_2\frac{1}{2}$，$\log_2 4<\log_2 x$

底 2 は 1 より大きいことと，① から　$0<x<\frac{1}{2}$，$4<x$

(4)　与式の両辺は正の数であるから，2 を底とする対数をとると，底は 1 より大きいので

$\log_2 2^x>\log_2 3^{x-1}$　　よって　$x>(x-1)\log_2 3$

ゆえに　$x>x\log_2 3-\log_2 3$

$x-x\log_2 3>-\log_2 3$

$x(1-\log_2 3)>-\log_2 3$

$1-\log_2 3$ は負の数より

よって　$x<\frac{-\log_2 3}{1-\log_2 3}$　　つまり　$x<\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}$

8．(1)　不等式 $\log_a(3x^2-3x-18)>\log_a(2x^2-10x)$ を解け。ただし，$a \fallingdotseq 1$，$a>0$とする。

(2)　不等式 $\log_2 x-6\log_x 2 \geqq 1$ を解け。

解答　(1)　$0<a<1$ のとき $-9<x<-2$，　$a>1$ のとき $x<-9$，$5<x$

(2)　$\frac{1}{4} \leqq x<1$，$8 \leqq x$

解説

(1)　(真数)>0 から　$3x^2-3x-18>0$，$2x^2-10x>0$

前者は　$3(x+2)(x-3)>0$　これを解いて　$x<-2$，$3<x$

後者は　$2x(x-5)>0$　　これを解いて　$x<0$，$5<x$

よって　$x<-2$，$5<x$ …… ①

[1]　$0<a<1$ のとき　不等式から　$3x^2-3x-18<2x^2-10x$

ゆえに　$x^2+7x-18<0$　　$\therefore$　$(x+9)(x-2)<0$

これを解いて $-9<x<2$　よって，① から　$-9<x<-2$

[2]　$a>1$ のとき　不等式から　$3x^2-3x-18>2x^2-10x$

ゆえに $(x+9)(x-2)>0$ を解いて　$x<-9$，$2<x$

よって，① から　$x<-9$，$5<x$

(2)　対数の真数，底の条件から　$x>0$　かつ　$x \fallingdotseq 1$

また　$\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$

よって，不等式は　$\log_2 x-\frac{6}{\log_2 x} \geqq 1$　…… ①

[1]　$\log_2 x>0$　すなわち　$x>1$ のとき

① の両辺に $\log_2 x$ を掛けて　$(\log_2 x)^2-6 \geqq \log_2 x$

よって　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-6 \geqq 0$

ゆえに　$(\log_2 x+2)(\log_2 x-3) \geqq 0$

$\log_2 x+2>0$ であるから　$\log_2 x \geqq 3$

底 2 は 1 より大きいから　$x \geqq 2^3$　すなわち　$x \geqq 8$

[2]　$\log_2 x<0$　すなわち　$0<x<1$ のとき

① の両辺に $\log_2 x$ を掛けて（不等式の向きに気をつけて）

$(\log_2 x)^2-6 \leqq \log_2 x$

よって　$(\log_2 x)^2-\log_2 x-6 \leqq 0$

ゆえに　$(\log_2 x+2)(\log_2 x-3) \leqq 0$

$\log_2 x-3<0$ であるから　$\log_2 x \geqq -2$

よって　$-2 \leqq \log_2 x<0$

底 2 は 1 より大きいから　$2^{-2} \leqq x<2^0$　すなわち　$\frac{1}{4} \leqq x<1$

[1]，[2] から　$\frac{1}{4} \leqq x<1$，$8 \leqq x$

9．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。0.3^{100} は小数第 イ $\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる。

解答　53

解説

$\log_{10}0.3^{100}=100\log_{10}\frac{3}{10}=100(\log_{10}3-1)=100(0.4771-1)=-52.29$

よって　$-53<\log_{10}0.3^{100}<-52$

ゆえに　$10^{-53}<0.3^{100}<10^{-52}$

よって，0.3^{100} は小数第 イ 53 位に初めて 0 でない数字が現れる。

10．自然数 $N=7^{777}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，次の値（小数第 5 位を四捨五入したもの）を用いてもよい。

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$

(1)　N は何桁の数か。　　(2)　N の先頭の数字は何か。

(3)　N の末尾の数字は何か。

解答　(1)　657桁　(2)　4　(3)　7

解説

(1)　$\log_{10}N=777\log_{10}7=777\times 0.8451=656.6427$　…… ①

よって　$10^{656}<N<10^{657}$

ゆえに，N は 657 桁の数である。

(2)　$\log_{10}4=2\times 0.3010=0.6020$，$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-0.3010=0.6990$

よって　$656.6020<656.6427<656.6990$

ゆえに　$\log_{10}4+656<\log_{10}N<\log_{10}5+656$

底が 1 よりも大きいので

すなわち　$4\times 10^{656}<N<5\times 10^{656}$

よって，N の先頭の数字は　4

(3)　7^1，7^2，7^3，7^4，7^5，…… の末尾の数字は，順に

7，9，3，1，7，……

よって，末尾の数字は 7，9，3，1 が繰り返し現れる。

$777=4\times 194+1$ であるから

$$N=7^{4\times 194+1}=(7^4)^{194}\times 7$$

$(7^4)^{194}$ の末尾の数字は 1 であるから，N の末尾の数字は　7