数学演習（対数関数）Ｈ２０．１２．９　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1. 次の式の値を求めよ。

(1) $4\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 4)$

(3) $5^{1-\log_5 7}$

(4) $\log_8\sqrt{8+2\sqrt{12}}+\log_8\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

2. $\log_2 3=a$, $\log_3 7=b$ とするとき，$\log_{14}84$ を a , b を用いて表せ。

3. 次の方程式を解け。

(1) $2^x=3^{x+1}$

(2) $2^x+2^{-x}=3$

(3) $\log_2 x+2\log_4(x+3)=2$

4. 次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(5-3x)\leqq -3$

(2) $(\log_2 x)^2>\log_{\sqrt{2}}\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$

(3) $2\log_a(x-1)<\log_a(7-x)$

5. 関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}4(x-1)$ のグラフを書け。

6. 関数 $y=\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)\left(\log_2\dfrac{x}{2}\right)$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最小値･最大値とそのときのxの値を求めよ。

7. 以下，必要ならば$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}7=0.8451$ を用いてもよい。

(1) $18^n>100000$ を満たす，最小の自然数を求めよ。

(2) 5^{50} は何桁の自然数か。また，最高位の数字は何か求めよ。

(3) 0.6^{30} を小数で表したとき，小数第何位に初めて０でない数字が現れるか求めよ。

数学演習（対数関数）H20. 12. 9　　（　）組（　）番　名前（ こたえ ）

1. 次の式の値を求めよ。

(1) $4\log_2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=4\log_2 2^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\sqrt{3}-\log_2 2$

$=2\log_2 2-\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3-1$

$=2-1=1$　5

(2) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 4)$　注）一番小さい底に揃える。

$=\left(\log_2 9+\frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\frac{\log_2 2}{\log_2 3}+\frac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\log_2 3^2+\frac{\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{2}{\log_2 3^2}\right)$

$=\left(2\log_2 3+\frac{\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{2}{2\log_2 3}\right)$

$=\frac{7}{3}\log_2 3\times\frac{2}{\log_2 3}=\frac{14}{3}$　5

(3) $5^{1-\log_5 7}$

$=5\times 5^{-\log_5 7}$

$=5\times 5^{\log_5 7^{-1}}=5\times 7^{-1}=\frac{5}{7}$　5

$(a^{\log_a b}=b)$

(4) $\log_8\sqrt{8+2\sqrt{12}}+\log_8\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$=\log_8\left(\sqrt{8+2\sqrt{12}}\times\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)$

$=\log_8\sqrt{(8+4\sqrt{3})(8-4\sqrt{3})}$

$=\log_8\sqrt{64-48}=\log_8\sqrt{16}$　5

$=\frac{\log_2 4}{\log_2 8}=\frac{2}{3}$

2. $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$とするとき，$\log_{14}84$をa，bを用いて表せ。

$b=\log_3 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 3}=\frac{\log_2 7}{a}$ より $\log_2 7=ab$.

ここで

$\log_{14}84=\frac{\log_2 84}{\log_2 14}=\frac{\log_2(2^2\cdot 3\cdot 7)}{\log_2(2\cdot 7)}$

$=\frac{\log_2 2^2+\log_2 3+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 7}$

$=\frac{2+a+ab}{1+ab}$　5

3. 次の方程式を解け。

(1) $2^x=3^{x+1}$　注）小さい数を底にする。

両辺2を底とする対数をとると

$\log_2 2^x=\log_2 3^{x+1}$

$x\log_2 2=(x+1)\log_2 3$

$x=x\log_2 3+\log_2 3$

∴ $x-x\log_2 3=\log_2 3$

$x(1-\log_2 3)=\log_2 3$

∴ $x=\frac{\log_2 3}{1-\log_2 3}$　5

(2) $2^x+2^{-x}=3$

$2^x+\frac{1}{2^x}=3$

両辺に 2^x をかけて、

$(2^x)^2+1=3\cdot 2^x$

$(2^x)^2-3\cdot 2^x+1=0$

$2^x=t$とおくと、$t>0$

$t^2-3t+1=0$

∴ $t=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$（どちらも $t>0$ を満たす）

∴ $2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ より

$x=\log_2\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\log_2(3\pm\sqrt{5})-1$　5

(3) $\log_2 x+2\log_4(x+3)=2$

真数は正より $x>0$ かつ $x+3>0$

∴ 共通範囲より $x>0$ …①

また

$\log_2 x+2\log_4(x+3)=2$

$\log_2 x+2\cdot\frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4}=2$

$\log_2 x+\frac{2\log_2(x+3)}{2}=2$

∴ $\log_2 x+\log_2(x+3)=2$

∴ $\log_2 x(x+3)=2$

より $x(x+3)=4$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

∴ $x=-4, 1$

①より $x=1$　5

4. 次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(5-3x)\leqq -3$

真数は正より

$5-3x>0$　∴ $x<\frac{5}{3}$ …①

$\log_{\frac{1}{2}}(5-3x)\leqq -3$

底が1より小さいので　（向き変わる）

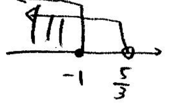
$5-3x\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

∴ $5-3x\geqq 8$

解いて

$x\leqq -1$

①との共通範囲より



$x\leqq -1$　5

(2) $(\log_2 x)^2>\log_{\sqrt{2}}\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$

真数は正より $x>0$ かつ $\frac{x^2}{2\sqrt{2}}>0$

∴ 共通範囲より $x>0$ …①

$(\log_2 x)^2>\log_{\sqrt{2}}\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$

$(\log_2 x)^2>\log_{\sqrt{2}}x^2-\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}$

$(\log_2 x)^2>2\log_{\sqrt{2}}x-\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^3$

$(\log_2 x)^2>2\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2\sqrt{2}}-3$

$(\log_2 x)^2>4\log_2 x-3$

∴ $(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3>0$

$(\log_2 x-1)(\log_2 x-3)>0$

∴ $\log_2 x<1$, $\log_2 x>3$

底が1より大きいので

$x<2$, $x>8$

①とあわせて　10

$0<x<2$, $x>8$

(3) $2\log_a(x-1) < \log_a(7-x)$

真数は正より $x-1>0$ かつ $7-x>0$

共通範囲より $1<x<7$ …①

$2\log_a(x-1) < \log_a(7-x)$

$\therefore \log_a(x-1)^2 < \log_a(7-x)$

・$a>1$ の時　不変　　変わる　・$0<a<1$ の時

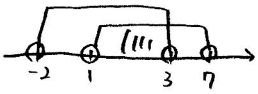
$(x-1)^2 < 7-x$ 　　　　$(x-1)^2 > 7-x$

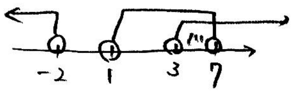
$\therefore$ $x^2-x-6<0$ 　　　　$\therefore$ $x^2-x-6>0$

$(x+2)(x-3)<0$ 　　　　$(x+2)(x-3)>0$

$\therefore$ $-2<x<3$ 　　　　$\therefore$ $x<-2,\ x>3$

①との共通範囲より 　　　　①との共通範囲より





$1<x<3$ 　　　　$3<x<7$

(10)

5. 関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}4(x-1)$ のグラフを書け。

$y=\log_{\frac{1}{2}}4(x-1)$

$=\log_{\frac{1}{2}}4+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

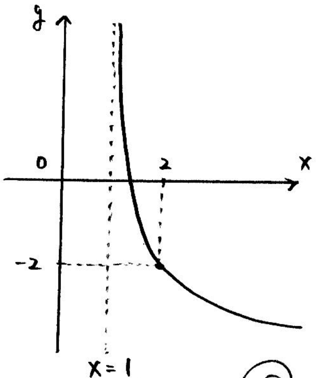
$=-2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

$\therefore$

$y+2=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

これは $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ のグラフを

x軸方向に+1, y軸方向に-2だけ平行移動したもの



(5)

6. 関数 $y=\left(\log_2\frac{4}{x}\right)\left(\log_2\frac{x}{2}\right)$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最小値・最大値とそのときのxの値を求めよ。

$y=(\log_2 4-\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 2)$

$=(2-\log_2 x)(\log_2 x-1)$

$t=\log_2 x$ とおくと,

$1\leqq x\leqq 8$

で底が1より大きいので

$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 8$

$\therefore$ $0\leqq t\leqq 3$.

この時,

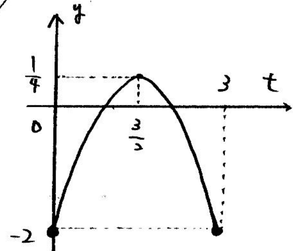
$y=(2-t)(t-1)$

$=-t^2+3t-2$

$=-(t^2-3t)-2$

$=-(t-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}-2$

$=-(t-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$



$t=\frac{3}{2}$の時, 最大値$\frac{1}{4}$

$t=0,3$の時, 最小値-2

$t=\frac{3}{2} \iff \log_2 x=\frac{3}{2}$

$\iff x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

よって 最大値 $\frac{1}{4}$ $(x=2\sqrt{2})$

最小値 -2 $(x=1,8)$

(10)

7. 以下，必要ならば$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$を用いてもよい。

(1) $18^n>100000$ を満たす，最小の自然数を求めよ。

$\log_{10}18^n>\log_{10}100000$

$n\log_{10}18>\log_{10}10^5$

$n\log_{10}(2\cdot3^2)>5$

$n(\log_{10}2+2\log_{10}3)>5$

$n(0.3010+2\cdot0.4771)>5$

$\therefore$ $n\times1.2552>5$

より $n>\frac{5}{1.2552}$

よって. $n>3.98$

より. 最小のnは

$n=4$

(5)

(2) 5^{50} は何桁の自然数か。また，最高位の数字は何か求めよ。

$\log_{10}5^{50}=50\log_{10}5$

$=50\log_{10}\frac{10}{2}$

$=50(\log_{10}10-\log_{10}2)$

$=50(1-0.3010)$

$=50\cdot0.699$

$=34.95$

ここで. $\log_{10}8=3\log_{10}2$

$=3\times0.3010$

$=0.9030$

$\log_{10}9=2\log_{10}3$

$=2\times0.4771$

$=0.9541$

より

$\log_{10}8<0.95<\log_{10}9$

$34+\log_{10}8<34.95<34+\log_{10}9$

$\therefore$ $\log_{10}(8\times10^{34})<\log_{10}5^{50}<\log_{10}(9\times10^{34})$

底は1より大きいので

$8\times10^{34}<5^{50}<9\times10^{34}$

が成り立つ。よって 5^{50} は

35桁の数

で. 最高位は 8

(10)

(3) 0.6^{30} を小数で表したとき，小数第何位に初めて0でない数字が現れるか求めよ。

$\log_{10}0.6^{30}=30\log_{10}0.6$

$=30\log_{10}\frac{6}{10}$

$=30(\log_{10}6-\log_{10}10)$

$=30\{\log_{10}(2\times3)-1\}$

$=30(\log_{10}2+\log_{10}3-1)$

$=30(0.3010+0.4771-1)$

$=30\cdot(-0.2219)$

$=-6.657$

$\therefore$ $-7<-6.657<-6$ より

$\log_{10}10^{-7}<\log_{10}0.6^{30}<\log_{10}10^{-6}$

$\therefore$ $0.1^7<0.6^{30}<0.1^6$

より 0.6^{30}は

小数第7位に

初めて0でない数字が現れる。

(5)