第１回定期考査（対数関数）Ｈ２０．５．２１　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{12}+\log_3\sqrt{8}$

(2) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

(3) $9^{\log_3 4}$

２．$\log_{54}18=a$ とするとき，$\log_2 3$ を a を用いて表せ。

３．次の３つの数の大小関係を，等号や不等号を用いて表せ。

$\log_2 3$, $\log_4 5$, 1.5

４．次の不等式を解け。

(1) $\log_3 x+\log_3(x-8)<2$

(2) $(\log_2 x)^2>\log_2 4x$

５．(1) $y=\log_2(x-1)+\log_2(9-x)$ の最大値･最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2) $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2$ の最大値･最小値と，そのときの x の値を求めよ。

６．以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 5^{60} は何桁の自然数か。

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ を小数で表したとき，小数第何位にはじめて０でない数が現れるか。

７．x の方程式 $\log_3(2x-a)=2\log_3(x-1)$ が異なる２つの実数解を持つとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

1．次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{12}+\log_3\sqrt{8}$

$=\frac12\log_3 2^{-1}-\frac32\log_3 12^{\frac13}+\log_3 8^{\frac12}$

$=-\frac12\log_3 2-\frac12\log_3(2^2\times3)+\frac12\log_3 2^3$

$=-\frac12\log_3 2-\log_3 2-\frac12\log_3 3+\frac32\log_3 2=-\frac12$ (5)

(2) $(\log_2 9+\log_8 3)(\log_3 16+\log_9 4)$

$=(\log_2 3^2+\frac{\log_2 3}{\log_2 8})(\frac{\log_2 16}{\log_2 3}+\frac{\log_2 4}{\log_2 9})$

$=(2\log_2 3+\frac13\log_2 3)(\frac{4}{\log_2 3}+\frac{2}{2\log_2 3})$

$=\frac73\log_2 3\times\frac{5}{\log_2 3}=\frac{35}{3}$ (5)

(3) $9^{\log_3 4}$ (5)

$9^{\log_3 4}=M$ とおいて

両辺底を3とする対数をとると

$\log_3 M=\log_3 9^{\log_3 4}=\log_3 4\times\log_3 9=2\log_3 4=\log_3 4^2$

∴ $M=4^2=16$

2．~~$\log_2 3=a$，$\log_2 5=b$~~ とするとき，~~$\log_{20}80$~~ を a，~~b~~ を用いて表せ。

$\log_{54}18=a$　　$\log_2 3$

$a=\frac{\log_2 18}{\log_2 54}=\frac{\log_2(2\times3^2)}{\log_2(2\times3^3)}=\frac{1+2\log_2 3}{1+3\log_2 3}$

∴ $a(1+3\log_2 3)=1+2\log_2 3$

$\log_2 3$について解くと

$3a\log_2 3-2\log_2 3=1-a$

∴ $\log_2 3=\frac{1-a}{3a-2}$ (5)

3．次の3つの数の大小関係を，等号や不等号を用いて表せ。

$\log_2 3$，$\log_4 5$，1.5

$\log_4 5=\frac{\log_2 5}{\log_2 4}=\frac12\log_2 5$

$1.5=\frac32=\frac32\log_2 2=\frac12\log_2 2^3=\frac12\log_2 8$

$\log_2 3=\frac22\log_2 3=\frac12\log_2 3^2=\frac12\log_2 9$

底2は1より大きいので $\log_2 5<\log_2 8<\log_2 9$ (10)

∴ $\frac12\log_2 5<\frac12\log_2 8<\frac12\log_2 9$ より $\log_4 5<1.5<\log_2 3$

4．次の不等式を解け。

(1) $\log_3 x+\log_3(x-8)<2$

真数正より $x>0$，$x-8>0$

∴ $x>8$ …①

また与式より

$\log_3 x(x-8)<2$

∴ $\log_3 x(x-8)<\log_3 9$

底3は1より大きいので

$x(x-8)<9$

∴ $x^2-8x-9<0$

$(x-9)(x+1)<0$

∴ $-1<x<9$

①より $8<x<9$ (10)

(2) $(\log_2 x)^2>\log_2 4x$

真数正より $x>0$ …①

与式より

$(\log_2 x)^2>\log_2 4+\log_2 x$

∴ $(\log_2 x)^2-\log_2 x-2>0$

$(\log_2 x-2)(\log_2 x+1)>0$

∴ $\log_2 x<-1$，$\log_2 x>2$

よって底2は1より大きいので

$x<2^{-1}$，$x>2^2$

①より

$0<x<\frac12$，$x>4$ (10)

5．(1) $y=\log_2(x-1)+\log_2(9-x)$ の最大値･最小値とそのときのxの値を求めよ。

真数正より $x-1>0$，$9-x>0$

∴ $1<x<9$ …①

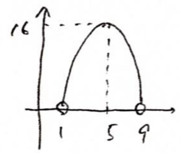
また

$y=\log_2(x-1)(9-x)$

$=\log_2(-x^2+10x-9)$

$=\log_2\{-(x-5)^2+16\}$

底2は1より大きいので①より



$x=5$の時 最大値 $\log_2 16=4$ をとり，最小値は存在しない

最大値 4 ($x=5$)

最小値 なし (10)

(2) $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2$ の最大値･最小値と，そのときのxの値を求めよ。

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x$

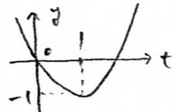
真数正より $x>0$.

また $t=\log_2 x$ とおくと

tはすべての実数値をとる。

$y=t^2-2t$

$=(t-1)^2-1$



よってグラフより $t=1$の時

最小値 -1 で，最大値はない

$t=1$の時，$t=\log_2 x$ より

$\log_2 x=1$ ∴ $x=2$

最小値 -1 ($x=2$)

最大値 なし (10)

6．以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) 5^{60}は何桁の自然数か。

$\log_{10}5^{60}=60\log_{10}5$

$=60\log_{10}\frac{10}{2}$

$=60(\log_{10}10-\log_{10}2)$

$=60(1-0.3010)$

$=60\times0.6990=41.94$

$41<41.94<42$ より

$\log_{10}10^{41}<\log_{10}5^{60}<\log_{10}10^{42}$

底10は1より大きいので

$10^{41}<5^{60}<10^{42}$ (10)

∴ 5^{60}は42桁の自然数

(2) $\left(\frac23\right)^{50}$を小数で表したとき，小数第何位にはじめて0でない数が現れるか。

$\log_{10}\left(\frac23\right)^{50}=50\log_{10}\frac23$

$=50(\log_{10}2-\log_{10}3)$

$=50(0.3010-0.4771)$

$=50(-0.1761)$

$=-8.805$

よって $-9<-8.805<-8$

より

$\log_{10}10^{-9}<\log_{10}\left(\frac23\right)^{50}<\log_{10}10^{-8}$

底10は1より大きいので

$10^{-9}<\left(\frac23\right)^{50}<10^{-8}$

∴ $\left(\frac23\right)^{50}$は小数第9位に初めて0でない数が現れる (10)

7．xの方程式 $\log_3(2x-a)=2\log_3(x-1)$ が異なる2つの実数解を持つとき，定数aの値の範囲を求めよ。

真数正より

$2x-a>0$，$x-1>0$

∴ $x>\frac a2$，$x>1$ …①

この時

$\log_3(2x-a)=\log_3(x-1)^2$

∴ $(x-1)^2=2x-a$

整理して

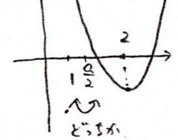
$x^2-4x+1+a=0$ …(＊)

ゆえに 2次方程式(＊)が

①の範囲で異なる2つの実数解を持つような aの範囲を求める。

$f(x)=x^2-4x+1+a$

$=(x-2)^2+a-3$ とおくと



上図のようになればよく

(i) $\frac12a<2$ (軸)

(ii) $a-3<0$ (判)

(iii) $f(1)>0$ かつ $f(\frac a2)>0$

を満たせばよい。

∴ (i)より $a<4$

(ii)より $a<3$

(iii)より $a>2$，$(\frac a2-1)^2>0$ (つまり $a\neq2$)

よって $2<a<3$ (10)