数学演習（指数関数）Ｈ２１．６．２２

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１. 次の計算をせよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$

(2) $(\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a^2})^6$

(3) $a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\div\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)$

(4) $\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2$

(5) $(\sqrt[3]{5}+1)(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)$

２. (1) $x>0$，$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，次 の値を求めよ。

(ア) $x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}$

(イ) $x+x^{-1}$

(2) $a>0$，$x>0$，$a^x+a^{-x}=5$ のとき，次の値を求めよ。

(ア) $a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}$

(イ) $a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}$

３. 次の計算をせよ。

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

(2) $0.09^{1.5}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt{32}\div\sqrt[6]{2}$

(5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$

４. 次の関数のグラフをかき，関数 $y=2^x$ のグラフとの位置関係を述べよ。

(1) $y=2^{x+1}$

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

(3) $y=4^{\frac{x}{2}}-1$

５. 次の各組の数の大小を比べよ。

(1) 2，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[5]{64}$

(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

(3) $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[4]{8}$

6. 次の方程式を解け。

(1) $3^{x+1}=81$　　(2) $27^{x+1}=9^{2x+1}$　　(3) $4^{x}-3\cdot 2^{x+1}-16=0$

7. 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<9$　　(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}-28\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+3>0$

8. 関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+10$ $(-3\leqq x\leqq 0)$ について

(1) $X=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ とするとき，X のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関数 y の最大値と最小値を求めよ。

9. $f(x)=2^{2x}+2^{-2x}-5(2^{x}+2^{-x})+3$ について

(1) $t=2^{x}+2^{-x}$ とおいて，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2) $f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

10. a を実数とし，$f(x)=4^{x}-a\cdot 2^{x+1}+a^{2}+a-6$ とおく。$f(x)=0$ を満たす実数 x が 2 つあるような a の値の範囲を求めよ。

1．次の計算をせよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$　　(2) $(\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a^2})^6$

(3) $a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\div\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)$　　(4) $\left(a^{\frac14}+b^{\frac14}\right)^2\left(a^{\frac14}-b^{\frac14}\right)^2$

(5) $(\sqrt[3]{5}+1)(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)$

解答 (1) $3\sqrt{2}$　(2) a^7　(3) a　(4) $a-2a^{\frac12}b^{\frac12}+b$　(5) 6

(1) (与式)$=(2\cdot3)^{\frac12}\times(2\cdot3^3)^{\frac14}\times(2\cdot3)^{-\frac14}$

$=\left(2^{\frac12}\cdot3^{\frac12}\right)\times\left(2^{\frac14}\cdot3^{\frac34}\right)\times\left(2^{-\frac14}\cdot3^{-\frac14}\right)$

$=2^{\frac12+\frac14-\frac14}\times3^{\frac12+\frac34-\frac14}=2^{\frac12}\times3=3\sqrt{2}$

別解 (与式)$=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\frac{54}{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{9}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

(2) (与式)$=\left(a^{\frac12}\times a^{\frac23}\right)^6=a^{\frac12\times6}\times a^{\frac23\times6}=a^{3+4}=a^7$

(3) (与式)$=a^{\frac43}b^{-\frac12}\times a^{-\frac23}b^{\frac13}\times a^{\frac13}b^{\frac16}$

$=a^{\frac43-\frac23+\frac13}b^{-\frac12+\frac13+\frac16}=a^1b^0=a$

(4) (与式)$=\left\{\left(a^{\frac14}+b^{\frac14}\right)\left(a^{\frac14}-b^{\frac14}\right)\right\}^2=\left\{\left(a^{\frac14}\right)^2-\left(b^{\frac14}\right)^2\right\}^2=\left(a^{\frac12}-b^{\frac12}\right)^2$

$=\left(a^{\frac12}\right)^2-2a^{\frac12}b^{\frac12}+\left(b^{\frac12}\right)^2=a-2a^{\frac12}b^{\frac12}+b$

(5) (与式)$=\left(5^{\frac13}+1\right)\left\{(5^2)^{\frac13}-5^{\frac13}+1\right\}=\left(5^{\frac13}+1\right)\left\{\left(5^{\frac13}\right)^2-5^{\frac13}\cdot1+1^2\right\}$

$=\left(5^{\frac13}\right)^3+1^3=5+1=6$

2．(1) $x>0$，$x^{\frac14}+x^{-\frac14}=3$ のとき，次 の値を求めよ。

(ア) $x^{\frac34}+x^{-\frac34}$　　(イ) $x+x^{-1}$

(2) $a>0$，$x>0$，$a^x+a^{-x}=5$ のとき，次の値を求めよ。

(ア) $a^{\frac12x}+a^{-\frac12x}$　　(イ) $a^{\frac32x}+a^{-\frac32x}$

解答 (1) (ア) 18　(イ) 47　(2) (ア) $\sqrt{7}$　(イ) $4\sqrt{7}$

(1) (ア) $x^{\frac34}+x^{-\frac34}=\left(x^{\frac14}\right)^3+\left(x^{-\frac14}\right)^3=\left(x^{\frac14}+x^{-\frac14}\right)^3-3x^{\frac14}x^{-\frac14}\left(x^{\frac14}+x^{-\frac14}\right)$

$=3^3-3\cdot1\cdot3=18$

(イ) $x+x^{-1}=\left(x^{\frac12}+x^{-\frac12}\right)^2-2x^{\frac12}x^{-\frac12}$

ここで　$x^{\frac12}+x^{-\frac12}=\left(x^{\frac14}+x^{-\frac14}\right)^2-2x^{\frac14}x^{-\frac14}=3^2-2\cdot1=7$

よって　$x+x^{-1}=7^2-2\cdot1=47$

(2) (ア) $\left(a^{\frac12x}+a^{-\frac12x}\right)^2=a^x+2a^{\frac12x}a^{-\frac12x}+a^{-x}=5+2\cdot1=7$

$a^{\frac12x}+a^{-\frac12x}>0$ であるから　$a^{\frac12x}+a^{-\frac12x}=\sqrt{7}$

(イ) (ア)の結果から

$a^{\frac32x}+a^{-\frac32x}=\left(a^{\frac12x}+a^{-\frac12x}\right)^3-3a^{\frac12x}a^{-\frac12x}\left(a^{\frac12x}+a^{-\frac12x}\right)$

$=(\sqrt{7})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

3．次の計算をせよ。

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac43}$　(2) $0.09^{1.5}$　(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$　(4) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt{32}\div\sqrt[6]{2}$

(5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$　(6) $\sqrt[3]{24}+\frac43\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac19}$

解答 (1) $\frac{16}{81}$　(2) 0.027　(3) 2　(4) 4　(5) $\sqrt{2}$　(6) $3\sqrt[3]{3}$

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac43}=\left\{\left(\frac32\right)^3\right\}^{-\frac43}=\left(\frac32\right)^{3\times(-\frac43)}=\left(\frac32\right)^{-4}=\left(\frac23\right)^4=\frac{16}{81}$

(2) $0.09^{1.5}=0.09^{\frac32}=(0.3^2)^{\frac32}=0.3^{2\times\frac32}=0.3^3=0.027$

別解 $0.09^{1.5}=\left(\frac{9}{100}\right)^{\frac32}=\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^{\frac32}=\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1000}=0.027$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

別解 $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ であるから　$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$

(4) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt{32}\div\sqrt[6]{2}=2^{-\frac13}\times2^{\frac52}\div2^{\frac16}=2^{-\frac13+\frac52-\frac16}=2^2=4$

(5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}=\frac{2^{\frac13}\cdot3^{\frac12}}{2^{\frac16}\cdot3^{\frac16}\cdot3^{\frac13}\cdot2^{-\frac13}}=2^{\frac13-\frac16+\frac13}\cdot3^{\frac12-\frac16-\frac13}=2^{\frac12}\cdot3^0=\sqrt{2}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\frac43\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac19}=\sqrt[3]{2^3\cdot3}+\frac43\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}=2\sqrt[3]{3}+\frac43\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$=\left(2+\frac43-\frac13\right)\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

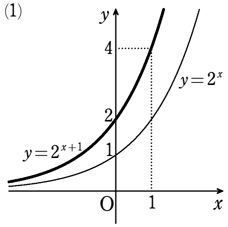
4．次の関数のグラフをかき，関数 $y=2^x$ のグラフとの位置関係を述べよ。

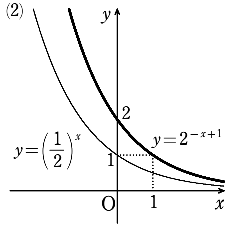
(1) $y=2^{x+1}$　(2) $y=\left(\frac12\right)^{x-1}$　(3) $y=4^{\frac{x}{2}}-1$

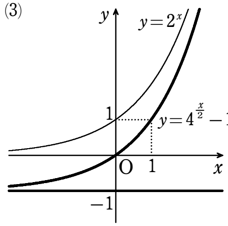
解答 (1) x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの　[図]

(2) y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの　[図]

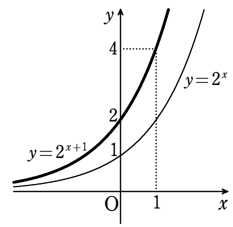
(3) y 軸方向に -1 だけ平行移動したもの　[図]

(1)


(2)


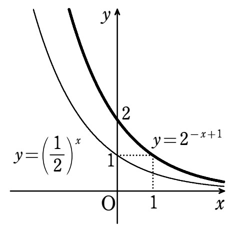
(3)


(1)　$y=2^{x+1}$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。[図]



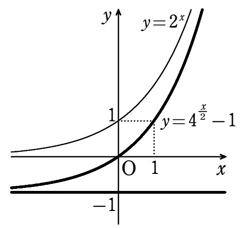
(2)　$\left(\frac12\right)^{x-1}=2^{-(x-1)}$

よって，$y=\left(\frac12\right)^{x-1}$ のグラフは $y=\left(\frac12\right)^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの，すなわち $y=2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。[図]



(3)　$4^{\frac{x}{2}}-1=(2^2)^{\frac{x}{2}}-1=2^x-1$

よって，$y=4^{\frac{x}{2}}-1$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。[図]



5. 次の各組の数の大小を比べよ。

(1) $2,\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{64}$　　(2) $2^{30},\ 3^{20},\ 10^{10}$　　(3) $\sqrt[3]{5},\ \sqrt{3},\ \sqrt[4]{8}$

解答 (1) $\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$　(2) $2^{30}<3^{20}<10^{10}$　(3) $\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

(1) $2=2^1,\ \sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$

底 2 は 1 より大きく，$\dfrac{2}{3}<1<\dfrac{6}{5}$ であるから　$2^{\frac{2}{3}}<2^1<2^{\frac{6}{5}}$

すなわち　$\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$

(2) $2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10},\ 3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$ であり，$8<9<10$ であるから

$8^{10}<9^{10}<10^{10}$

すなわち　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

(3) $x=\sqrt[3]{5},\ y=\sqrt{3},\ z=\sqrt[4]{8}$ とすると

$x^{12}=(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4=625$

$y^{12}=(\sqrt{3})^{12}=3^6=729$

$z^{12}=(\sqrt[4]{8})^{12}=8^3=512$

よって　$z^{12}<x^{12}<y^{12}$

$x>0,\ y>0,\ z>0$ であるから　$z<x<y$

すなわち　$\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

6. 次の方程式を解け。

(1) $3^{x+1}=81$　　(2) $27^{x+1}=9^{2x+1}$　　(3) $4^x-3\cdot 2^{x+1}-16=0$

解答 (1) $x=3$　(2) $x=1$　(3) $x=3$

(1) $81=3^4$ から　$3^{x+1}=3^4$

よって　$x+1=4$　　ゆえに　$x=3$

(2) $27^{x+1}=3^{3(x+1)},\ 9^{2x+1}=3^{2(2x+1)}$ から　$3^{3(x+1)}=3^{2(2x+1)}$

よって　$3(x+1)=2(2x+1)$

これを解いて　$x=1$

(3) 方程式を変形して　$(2^x)^2-6\cdot 2^x-16=0$

因数分解すると　$(2^x+2)(2^x-8)=0$

$2^x>0$ であるから　$2^x=8$　すなわち　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

7. 次の不等式を解け。

(1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<9$　　(2) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-1}-28\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+3>0$

解答 (1) $x>-2$　(2) $x<-1,\ x>2$

(1) $9=3^2$ であるから，不等式は　$3^{-x}<3^2$

底 3 は 1 より大きいから　$-x<2$　すなわち　$x>-2$

(2) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-1}=9\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^x=9\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2$ であるから，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=X$ とおくと，不等式は

$9X^2-28X+3>0$

よって　$(9X-1)(X-3)>0$

ゆえに $X>0$ より　$0<X<\dfrac{1}{9}$，$X>3$

したがって　$0<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\dfrac{1}{9}$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>3$

$0<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^2,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<-1$，$x>2$

8. 関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}-8\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+10\ (-3\leqq x\leqq 0)$ について

(1) $X=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ とするとき，X のとりうる値の範囲を求めよ。

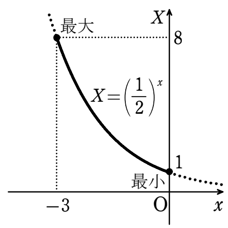
(2) 関数 y の最大値と最小値を求めよ。

解答 (1) $1\leqq X\leqq 8$　(2) $x=-3$ で最大値 10，$x=-2$ で最小値 -6

(1) 底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから，関数 $X=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ は減少関数である。

よって，$-3\leqq x\leqq 0$ のとき　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\geqq X\geqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

すなわち　$1\leqq X\leqq 8$



(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}=\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2=X^2$ であるから

$y=X^2-8X+10=(X-4)^2-6$

$1\leqq X\leqq 8$ の範囲で，y は

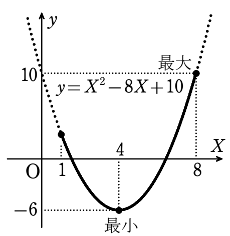
$X=8$ で最大値 10，$X=4$ で最小値 -6

をとる。

$X=8$ のとき $x=-3$，$X=4$ のとき　$x=-2$

よって，$x=-3$ で最大値 10，

$x=-2$ で最小値 -6 をとる。



9. $f(x)=2^{2x}+2^{-2x}-5(2^x+2^{-x})+3$ について

(1) $t=2^x+2^{-x}$ とおいて，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2) $f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答 (1) $f(x)=t^2-5t+1$　(2) $x=\pm 1$ で最小値 $-\dfrac{21}{4}$

(1) $2^{2x}+2^{-2x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}$

$=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

よって　$f(x)=t^2-2-5t+3$

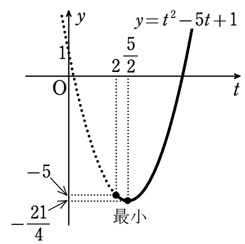
ゆえに　$f(x)=t^2-5t+1$

(2) $2^x>0,\ 2^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) より

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$　　よって　$t\geqq 2$

ゆえに　$f(x)=t^2-5t+1$

$=\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}$



$t\geqq 2$ の範囲において，$f(x)$ は $t=\dfrac{5}{2}$ で最小値 $-\dfrac{21}{4}$ をとる。

$t=\dfrac{5}{2}$ のとき　$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$

両辺に $2\cdot 2^x$ を掛けて整理すると

$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2=0$

よって　$(2^x-2)(2\cdot 2^x-1)=0$

ゆえに　$2^x=2$　または　$2^x=2^{-1}$　　したがって　$x=\pm 1$

よって，$f(x)$ は，$x=\pm 1$ で最小値 $-\dfrac{21}{4}$ をとる。

10. a を実数とし，$f(x)=4^x-a\cdot 2^{x+1}+a^2+a-6$ とおく。$f(x)=0$ を満たす実数 x が 2 つあるような a の値の範囲を求めよ。

解答 $2<a<6$

与式から　$f(x)=(2^x)^2-2a\cdot 2^x+a^2+a-6$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$

$f(x)=0$ から　$X^2-2aX+a^2+a-6=0$　…… ①

$f(x)=0$ を満たす実数 x が 2 つあるための条件は，2 次方程式 ① が $X>0$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつことである。

$y=X^2-2aX+a^2+a-6$ とおくと，

①の解はこの放物線とX軸との交点のX座標に等しい。

$y=X^2-2aX+a^2+a-6=(X-a)^2+a-6$ とより，頂点は $(a,\ a-6)$

よって，X^2 の係数が正より，X 軸と異なる 2 点で交わるには

（頂点のy座標）$=a-6<0$　　よって　$a<6$　…… ②

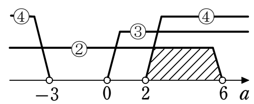
また 軸について，$x=a>0$　ゆえに　$a>0$　…… ③

そして，$X=0$ のとき，$y>0$ でなければならず

$X=0$ のとき，$y=a^2+a-6>0$

よって　$(a-2)(a+3)>0$

ゆえに　$a<-3,\ 2<a$　…… ④



②，③，④ の共通範囲を求めて　$2<a<6$