数学演習（指数関数の方程式･不等式･最大最小）Ｈ２２．２．１７

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次の関数のグラフをかけ。また，$y=2^x$ のグラフとの位置関係をいえ。

(1)　$y=-2^x$　　(2)　$y=2^{-x}$　　(3)　$y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　(4)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

２．次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2^{x+1}$　　(2)　$y=2^x+1$　　(3)　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$

３．次の数の大小関係を調べよ。

(1)　9^4，9^{-2}，1，9^3　　(2)　0.9^3，0.9^{-3}，0.9^2　　(3)　$\sqrt[5]{8}$，$\sqrt[6]{16}$，$\sqrt[8]{64}$

４．次の各組の数の大小を比べよ。

(1)　2，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[5]{64}$　　(2)　2^{30}，3^{20}，10^{10}　　(3)　$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[4]{8}$

５．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$4^x=64$　　(2)　$5^{2x}=\dfrac{1}{125}$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}=\dfrac{1}{81}$　　(4)　$16^x=2$

(5)　$2^x<32$　　(6)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\dfrac{1}{243}$　　(7)　$6^{3x}\geqq\dfrac{1}{216}$　　(8)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leqq125$

６．次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\left(\dfrac{1}{32}\right)^x=16$　　(2)　$9^{1-3x}=\dfrac{1}{27}$　　(3)　$8^{2x+3}=2^{3x+5}$

(4)　$243^x<3^{2x+3}$　　(5)　$(0.5)^{2x-1}<\sqrt[4]{32}$　　(6)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\geqq2^{x-3}$

7．関数 $y=4^x-2^{x+3}+13$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=2^x$ とおいて，y を t の式で表せ。

(2)　y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

8．次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2^{2x}-4\cdot 2^x+1$　　(2)　$y=-2^{2x}+2^x+2$　$(x\leqq 2)$

9．次の方程式を解け。

(1)　$(3^x)^2+3^x=12$　　(2)　$10^{2x}+10^x=2$　　(3)　$4^x+2^{x+1}-24=0$

10. 次の不等式を解け。

(1)　$2^{2x}-2^{x+2}<0$　　(2)　$16^x-3\cdot 4^x-4\geqq 0$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-\dfrac{1}{3^x}-6>0$

11. 次の方程式と不等式を解け。

(1)　$9^x-10\cdot 3^x+9=0$　　(2)　$4^x-64=3\cdot 2^{x+2}$

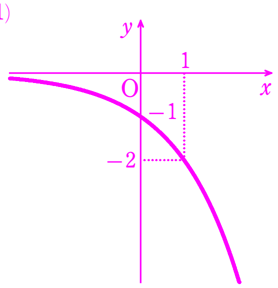
(3)　$16^x-3\cdot 4^x-4<0$　　(4)　$\dfrac{1}{4^x}\geqq\dfrac{3}{2^x}-2$

1．次の関数のグラフをかけ。また，$y=2^x$ のグラフとの位置関係をいえ。

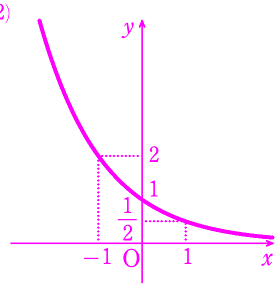
(1)　$y=-2^x$　　(2)　$y=2^{-x}$　　(3)　$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　(4)　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

解答　(1)　[図]，x 軸について対称　　(2)　[図]，y 軸について対称
(3)　[図]，原点について対称　　(4)　[図]，一致する

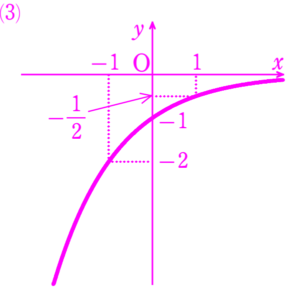
(1)



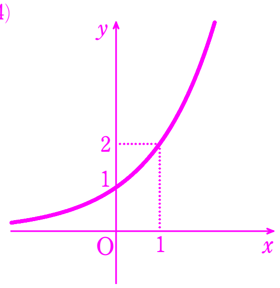
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　グラフは[図]

$y=-2^x$　より　$-y=2^x$　である。

$y=2^x$　のyに$-y$が代入されたものなので

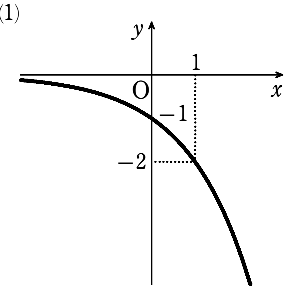
このグラフは，$y=2^x$ のグラフと x 軸について対称である。

(2)　グラフは[図]

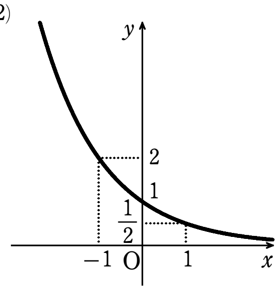
$y=2^x$　のxに$-x$が代入されたものなので

このグラフは，$y=2^x$ のグラフと y 軸について対称である。

(1)



(2)



(3)　グラフは[図]

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x=-(2^{-1})^x=-2^{-x}$　より　$-y=2^{-x}$　である

$y=2^x$のxに$-x$が，yに$-y$が代入されているので

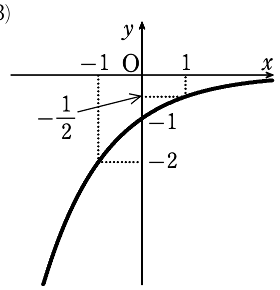
このグラフは，$y=2^x$ のグラフと原点について対称である。

(4)　グラフは[図]

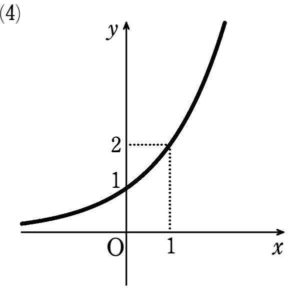
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=(2^{-1})^{-x}=2^{(-1)(-x)}=2^x$　より

このグラフは，$y=2^x$ のグラフと一致する。

(3)



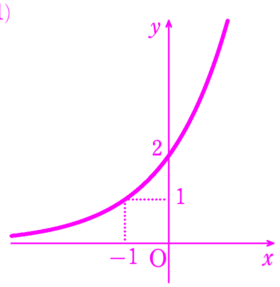
(4)



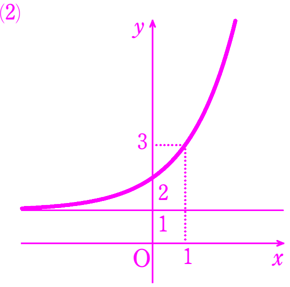
2．次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2^{x+1}$　　(2)　$y=2^x+1$　　(3)　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

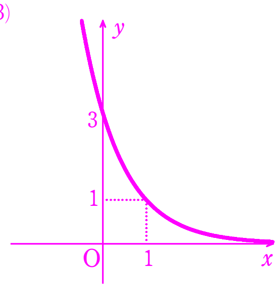
解答　(1)



(2)



(3)



解説

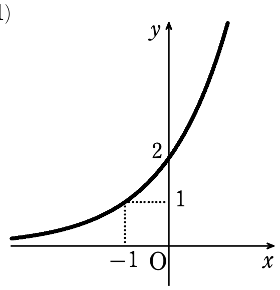
(1)　$y=2^x$のxに$x+1$が代入されているので

$y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

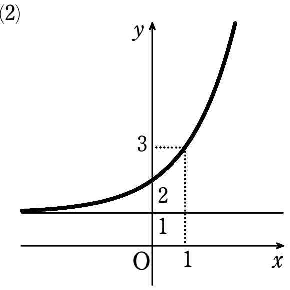
(2)　$y=2^x+1$より$y-1=2^x$　よって$y=2^x$のyに$y-1$が代入されたものなので

$y=2^x$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

(1)



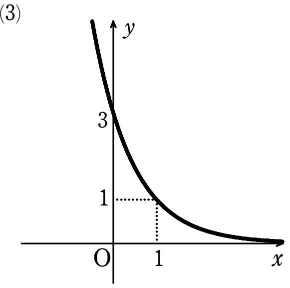
(2)



(3)　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$の$x$に$x-1$が代入されたものなので

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

(3)



3．次の数の大小関係を調べよ。

(1)　$9^4,\ 9^{-2},\ 1,\ 9^3$　　(2)　$0.9^3,\ 0.9^{-3},\ 0.9^2$　　(3)　$\sqrt[5]{8},\ \sqrt[6]{16},\ \sqrt[8]{64}$

解答　(1)　$9^{-2}<1<9^3<9^4$　　(2)　$0.9^3<0.9^2<0.9^{-3}$　　(3)　$\sqrt[5]{8}<\sqrt[6]{16}<\sqrt[8]{64}$

解説

(1)　$1=9^0$　である

関数 $y=9^x$ は，底 9 が 1 より大きいから，x の値が増加すると y の値も増加する。

よって　　$9^{-2}<9^0<9^3<9^4$

すなわち　　$9^{-2}<1<9^3<9^4$

(2)　関数 $y=0.9^x$ は，底 0.9 が 1 より小さいから，x の値が増加すると y の値は減少する。

よって　　$0.9^3<0.9^2<0.9^{-3}$

(3)　$\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$，$\sqrt[6]{16}=2^{\frac{4}{6}}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[8]{64}=2^{\frac{6}{8}}=2^{\frac{3}{4}}$

関数 $y=2^x$ は，底 2 が 1 より大きいから，x の値が増加すると y の値も増加する。

よって　　$2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}$

すなわち　　$\sqrt[5]{8}<\sqrt[6]{16}<\sqrt[8]{64}$

4．次の各組の数の大小を比べよ。

(1)　$2,\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{64}$　　(2)　$2^{30},\ 3^{20},\ 10^{10}$　　(3)　$\sqrt[3]{5},\ \sqrt{3},\ \sqrt[4]{8}$

解答　(1)　$\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$　　(2)　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$　　(3)　$\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

解説

(1)　$2=2^1$，$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$

底 2 は 1 より大きく，$\frac{2}{3}<1<\frac{6}{5}$ であるから　　$2^{\frac{2}{3}}<2^1<2^{\frac{6}{5}}$

すなわち　　$\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$ であり，$8<9<10$ であるから

$8^{10}<9^{10}<10^{10}$

すなわち　　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

(3)　$x=\sqrt[3]{5}$，$y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt[4]{8}$ とすると

$x^{12}=(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4=625$

$$y^{12}=(\sqrt{3})^{12}=3^6=729$$
$$z^{12}=(\sqrt[4]{8})^{12}=8^3=512$$

よって　$z^{12}<x^{12}<y^{12}$

$x>0,\ y>0,\ z>0$ であるから　$z<x<y$

すなわち　$\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

5. 次の方程式と不等式を解け。

(1) $4^x=64$　(2) $5^{2x}=\dfrac{1}{125}$　(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}=\dfrac{1}{81}$　(4) $16^x=2$

(5) $2^x<32$　(6) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\dfrac{1}{243}$　(7) $6^{3x}\geqq\dfrac{1}{216}$　(8) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leqq 125$

解答　(1) $x=3$　(2) $x=-\dfrac{3}{2}$　(3) $x=3$　(4) $x=\dfrac{1}{4}$　(5) $x<5$
(6) $x<5$　(7) $x\geqq-1$　(8) $x\geqq-3$

解説

(1) $4^x=64$ から　$4^x=4^3$　よって　$x=3$

(2) $5^{2x}=\dfrac{1}{125}$ から　$5^{2x}=5^{-3}$

よって　$2x=-3$　したがって　$x=-\dfrac{3}{2}$

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}=\dfrac{1}{81}$ から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$

よって　$x+1=4$　したがって　$x=3$

(4) $16^x=2$ から　$2^{4x}=2^1$

よって　$4x=1$　したがって　$x=\dfrac{1}{4}$

(5) $2^x<32$ から　$2^x<2^5$
底 2 は 1 より大きいから　$x<5$

(6) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\dfrac{1}{243}$ から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x<5$

(7) $6^{3x}\geqq\dfrac{1}{216}$ から　$6^{3x}\geqq 6^{-3}$

底 6 は 1 より大きいから　$3x\geqq-3$
したがって　$x\geqq-1$

(8) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leqq 125$ から　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leqq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$

底 $\dfrac{1}{5}$ は 1 より小さいから　$x\geqq-3$

別解　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leqq 125$ から　$5^{-x}\leqq 5^3$

底 5 は 1 より大きいから　$-x\leqq 3$
したがって　$x\geqq-3$

6. 次の方程式と不等式を解け。

(1) $\left(\dfrac{1}{32}\right)^x=16$　(2) $9^{1-3x}=\dfrac{1}{27}$　(3) $8^{2x+3}=2^{3x+5}$

(4) $243^x<3^{2x+3}$　(5) $(0.5)^{2x-1}<\sqrt[4]{32}$　(6) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\geqq 2^{x-3}$

解答　(1) $x=-\dfrac{4}{5}$　(2) $x=\dfrac{5}{6}$　(3) $x=-\dfrac{4}{3}$　(4) $x<1$　(5) $x>-\dfrac{1}{8}$
(6) $x\leqq 1$

解説

(1) $\left(\dfrac{1}{32}\right)^x=16$ から　$2^{-5x}=2^4$

ゆえに　$-5x=4$　よって　$x=-\dfrac{4}{5}$

(2) $9^{1-3x}=\dfrac{1}{27}$ から　$3^{2(1-3x)}=3^{-3}$

ゆえに　$2(1-3x)=-3$　よって　$x=\dfrac{5}{6}$

(3) $8^{2x+3}=2^{3x+5}$ から　$2^{3(2x+3)}=2^{3x+5}$

ゆえに　$3(2x+3)=3x+5$　よって　$x=-\dfrac{4}{3}$

(4) $243^x<3^{2x+3}$ から　$3^{5x}<3^{2x+3}$
底 3 は 1 より大きいから　$5x<2x+3$
よって　$x<1$

(5) $(0.5)^{2x-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}=2^{-(2x-1)}$，$\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$ であるから，不等式は

$$2^{-2x+1}<2^{\frac{5}{4}}$$

底 2 は 1 より大きいから　$-2x+1<\dfrac{5}{4}$

よって　$x>-\dfrac{1}{8}$

(6) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\geqq 2^{x-3}$ から　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}\geqq 2^{x-3}$

ゆえに　$2^{-2x}\geqq 2^{x-3}$
底 2 は 1 より大きいから　$-2x\geqq x-3$
よって　$x\leqq 1$

7. 関数 $y=4^x-2^{x+3}+13$ について，次の問いに答えよ。

(1) $t=2^x$ とおいて，y を t の式で表せ。

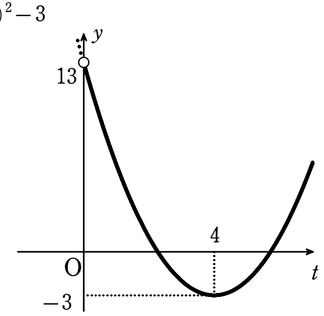
(2) y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答　(1) $y=t^2-8t+13$　(2) $x=2$ のとき最小値 -3

解説

(1) $4^x-2^{x+3}+13=(2^x)^2-8\cdot 2^x+13$ であるから　$y=t^2-8t+13$

(2) $y=t^2-8t+13=(t^2-8t+4^2)-4^2+13=(t-4)^2-3$
$2^x=t$ より，$t>0$ であるから，この範囲で y は
$t=4$ すなわち $x=2$ のとき最小値 -3 をとる。



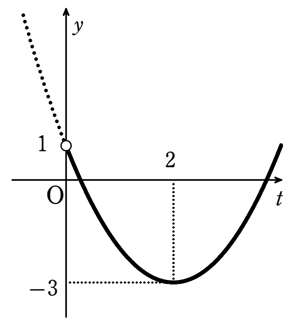
8. 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=2^{2x}-4\cdot 2^x+1$　(2) $y=-2^{2x}+2^x+2$　$(x\leqq 2)$

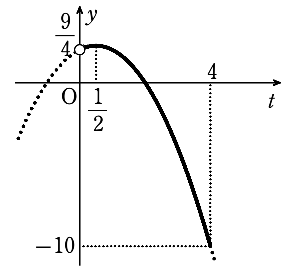
解答　(1) $x=1$ で最小値 -3，最大値はない
(2) $x=-1$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$，$x=2$ で最小値 -10

解説

(1) $y=(2^x)^2-4\cdot 2^x+1$　$2^x=t$ とおくと　$t>0$ ……①
また　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$
① の範囲で y は $t=2$ すなわち $x=1$ で最小値 -3 をとる。また，最大値はない。



(2) $y=-(2^x)^2+2^x+2$ $(x\leqq 2)$
$2^x=t$ とおく。$x\leqq 2$ から　$2^x\leqq 2^2$
よって，$t\leqq 4$であるが，$t>0$であるから
$0<t\leqq 4$ ……①
また　$y=-t^2+t+2=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$
① の範囲で y は
$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $x=-1$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$,
$t=4$ すなわち $x=2$ で最小値 -10
をとる。



9. 次の方程式を解け。

(1) $(3^x)^2+3^x=12$　(2) $10^{2x}+10^x=2$　(3) $4^x+2^{x+1}-24=0$

解答　(1) $x=1$　(2) $x=0$　(3) $x=2$

解説

(1) $(3^x)^2+3^x=12$ から　$(3^x)^2+3^x-12=0$
$3^x=t$ とおくと　$t^2+t-12=0$　よって　$(t-3)(t+4)=0$
$t>0$ であるから　$t=3$　すなわち　$3^x=3$
したがって　$x=1$

(2) $10^{2x}+10^x=2$ から　$(10^x)^2+10^x-2=0$
$10^x=t$ とおくと　$t^2+t-2=0$　よって　$(t-1)(t+2)=0$
$t>0$ であるから　$t=1$　すなわち　$10^x=10^0$
したがって　$x=0$

(3) $4^x+2^{x+1}-24=0$ から　$(2^x)^2+2\cdot 2^x-24=0$
$2^x=t$ とおくと　$t^2+2t-24=0$　よって　$(t-4)(t+6)=0$
$t>0$ であるから　$t=4$　すなわち　$2^x=2^2$
したがって　$x=2$

10. 次の不等式を解け。

(1)　$2^{2x}-2^{x+2}<0$　　(2)　$16^x-3\cdot 4^x-4\geqq 0$　　(3)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{1}{3^x}-6>0$

解答　(1)　$x<2$　　(2)　$x\geqq 1$　　(3)　$x<-1$

解説

(1)　$2^{2x}-2^{x+2}<0$ から　　$(2^x)^2-4\cdot 2^x<0$

$2^x=t$ とおくと　　$t^2-4t<0$　　よって　　$t(t-4)<0$　…… ①

$t>0$ であるから，① より　　$t-4<0$

ゆえに　　$t<4$　　すなわち　　$2^x<2^2$

底 2 は 1 より大きいから　　$x<2$

(2)　$16^x-3\cdot 4^x-4\geqq 0$ から　　$(4^x)^2-3\cdot 4^x-4\geqq 0$

$4^x=t$ とおくと　　$t^2-3t-4\geqq 0$　　よって　　$(t+1)(t-4)\geqq 0$　…… ①

$t>0$ であるから　　$t+1>0$　　ゆえに，① から　　$t-4\geqq 0$

したがって　　$t\geqq 4$　　すなわち　　$4^x\geqq 4$

底 4 は 1 より大きいから　　$x\geqq 1$

(3)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{1}{3^x}-6>0$ から　　$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\left(\frac{1}{3}\right)^x-6>0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと　　$t^2-t-6>0$　　よって　　$(t+2)(t-3)>0$　…… ①

$t>0$ であるから　　$t+2>0$　　ゆえに，① から　　$t-3>0$

したがって　　$t>3$　　すなわち　　$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　　$x<-1$

11. 次の方程式と不等式を解け。

(1)　$9^x-10\cdot 3^x+9=0$　　(2)　$4^x-64=3\cdot 2^{x+2}$

(3)　$16^x-3\cdot 4^x-4<0$　　(4)　$\frac{1}{4^x}\geqq\frac{3}{2^x}-2$

解答　(1)　$x=0,\ 2$　　(2)　$x=4$　　(3)　$x<1$　　(4)　$x\leqq -1,\ 0\leqq x$

解説

(1)　方程式を変形すると　　$(3^x)^2-10\cdot 3^x+9=0$

$3^x=t$ とおくと　　$t^2-10t+9=0$

ゆえに　　$(t-1)(t-9)=0$

よって　　$t=1,\ 9$　すなわち　$3^x=1,\ 9$

したがって　　$x=0,\ 2$

(2)　方程式を変形すると　　$(2^x)^2-12\cdot 2^x-64=0$

$2^x=t$ とおくと　　$t^2-12t-64=0$

ゆえに　　$(t+4)(t-16)=0$

$t>0$ であるから　　$t=16$　すなわち　$2^x=16$

よって　　$x=4$

(3)　不等式を変形すると　　$(4^x)^2-3\cdot 4^x-4<0$

$4^x=t$ とおくと　　$t^2-3t-4<0$

ゆえに　　$(t+1)(t-4)<0$　…… ①

$t>0$ であるから　　$t+1>0$

したがって，① から　　$t-4<0$

よって　　$t<4$　すなわち　$4^x<4$

底 4 は 1 より大きいから　　$x<1$

(4)　不等式の両辺に 4^x (>0) をかけて　　$1\geqq 3\cdot 2^x-2\cdot 4^x$

ゆえに　　$2\cdot(2^x)^2-3\cdot 2^x+1\geqq 0$

$2^x=t$ とおくと　　$2t^2-3t+1\geqq 0$

よって　　$(t-1)(2t-1)\geqq 0$

したがって　　$t\leqq\frac{1}{2},\ 1\leqq t$　すなわち　$2^x\leqq\frac{1}{2},\ 1\leqq 2^x$

ゆえに　　$2^x\leqq 2^{-1},\ 2^0\leqq 2^x$

底 2 は 1 より大きいから　　$x\leqq -1,\ 0\leqq x$