

1. 次の値を求めよ。 (1) 10^0 (2) 2^{-4} (3) $(-2)^{-3}$ (4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ (5) 0.5^{-4} 2. 次の計算をせよ。ただし、$a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。 (1) $a^{-3}a^5$ (2) $(a^{-2})^3$ (3) $(a^{-1})^3 \times (a^{-2})^2$ (4) $(a^3)^{-2} \div a^{-4}$ (5) $a^2b \div a^{-1}b^3$ (6) $(a^{-1}b)^{-2} \div (a^3b^{-1})^2$ 3. 次の計算をせよ。 (1) $8^{\frac{1}{3}}$ (2) $16^{\frac{3}{4}}$ (3) $81^{-\frac{5}{4}}$ (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$ (5) $0.01^{-\frac{3}{2}}$ 4. 次の値を求めよ。 (1) $\sqrt[4]{16}$ (2) $\sqrt[3]{343}$ (3) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ (4) $\sqrt[5]{0.00001}$ (5) $\sqrt[6]{4^3}$ (6) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}$ (7) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$ (8) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$	5. 次の値を求めよ。 (1) $\sqrt[3]{-125}$ (2) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$ (3) $\sqrt[3]{-0.008}$ 6. 次の計算をせよ。 (1) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ (2) $(9^{\frac{2}{3}} \times 3^{-2})^{\frac{3}{2}}$ (3) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$ (4) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$ (5) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[8]{25} \div \sqrt[12]{5}$ 7. 次の計算をせよ。ただし、$a > 0$ とする。 (1) $27^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{3}{2}}$ (2) $a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{3}}$ (3) $(a^2 \times \sqrt[3]{a^2})^{\frac{1}{4}}$	8. 次の計算をせよ。 (1) $2^0 \div 2^{-4}$ (2) $\sqrt[4]{64} \div \sqrt[4]{4}$ (3) $0.125^{-\frac{2}{3}}$ (4) $(8^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$ (5) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$ (6) $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{2}} \div 5^{-3}$ (7) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt{32}}$ 9. 次の計算をせよ。 (1) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{-24}$ (2) $\sqrt[3]{\sqrt{32}} \times \sqrt{8} \div \sqrt[3]{-16}$ (3) $\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{-2} + \sqrt[3]{16}$ (4) $\frac{8}{3}\sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$
---	--	--

10. 次の式を簡単にせよ。ただし、 $a>0$, $b>0$ とする。

- (1) $(a-b^{-1})\div(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})$
- (2) $(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})$

11. 次の式を簡単にせよ。ただし、 $a>0$, $b>0$ とする。

- (1) $(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}})$
- (2) $(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+b)$

12. $2^x=3$ のとき、 $\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$ の値を求めよ。

13. 次の問いに答えよ。

- (1) $2^x-2^{-x}=5$ のとき 2^x+2^{-x} の値を求めよ。
- (2) $2^x+2^{-x}=4$ のとき、 $2^{2x}+2^{-2x}$ と $2^{3x}+2^{-3x}$ の値を求めよ。

14. (1) $a>0$, $a^x=2$ のとき、 $(a^{3x}+a^{-3x})\div(a^x+a^{-x})$ の値を求めよ。

(2) $2^x-2^{-x}=1$ のとき、 4^x+4^{-x} , 8^x-8^{-x} , 16^x+16^{-x} の値を求めよ。

15. $x<0$ とする。 $3^x+3^{-x}=4$ のとき、 3^x-3^{-x} , 9^x-9^{-x} , 27^x-27^{-x} の値を求めよ。

1 . 次の値を求めよ。

(1) 10^0 (2) 2^{-4} (3) $(-2)^{-3}$ (4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ (5) 0.5^{-4}

【解答】 (1) 1 (2) $\frac{1}{16}$ (3) $-\frac{1}{8}$ (4) 9 (5) 16

【解説】

(1) $10^0=1$
(2) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$
(3) $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$
(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=1\div\frac{1}{9}=1\times\frac{9}{1}=9$

【別解】 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=\{(-3)^{-1}\}^{-2}=(-3)^{(-1)\times(-2)}=(-3)^2=9$

(5) $0.5^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$

【別解】 $0.5^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=(2^{-1})^{-4}=2^{(-1)\times(-4)}=2^4=16$

2 . 次の計算をせよ。ただし、 $a\neq 0$ 、 $b\neq 0$ とする。

(1) $a^{-3}a^5$ (2) $(a^{-2})^3$ (3) $(a^{-1})^3\times(a^{-2})^2$
(4) $(a^3)^{-2}\div a^{-4}$ (5) $a^2b\div a^{-1}b^3$ (6) $(a^{-1}b)^{-2}\div(a^3b^{-1})^2$

【解答】 (1) a^2 (2) a^{-6} (3) a^{-7} (4) a^{-2} (5) a^3b^{-2} (6) a^{-4}

【解説】

(1) $a^{-3}a^5=a^{-3+5}=a^2$
(2) $(a^{-2})^3=a^{-2\cdot3}=a^{-6}$
(3) $(a^{-1})^3\times(a^{-2})^2=a^{-3}\times a^{-4}=a^{-3+(-4)}=a^{-7}$
(4) $(a^3)^{-2}\div a^{-4}=a^{-6}\div a^{-4}=a^{-6-(-4)}=a^{-2}$
(5) $a^2b\div a^{-1}b^3=a^{2-(-1)}b^{1-3}=a^3b^{-2}$
(6) $(a^{-1}b)^{-2}\div(a^3b^{-1})^2=(a^{-1})^{-2}b^{-2}\div(a^3)^2(b^{-1})^2=a^2b^{-2}\div a^6b^{-2}$
 $=a^{2-6}b^{-2-(-2)}=a^{-4}b^0=a^{-4}$

3 . 次の計算をせよ。

(1) $8^{\frac{1}{3}}$ (2) $16^{\frac{3}{4}}$ (3) $81^{-\frac{5}{4}}$ (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$ (5) $0.01^{-\frac{3}{2}}$

【解答】 (1) 2 (2) 8 (3) $\frac{1}{243}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) 1000

【解説】

(1) $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

【別解】 $8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}=2^1=2$

(2) $16^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{16})^3=(\sqrt[4]{2^4})^3=2^3=8$

【別解】 $16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$

(3) $81^{-\frac{5}{4}}=\frac{1}{81^{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{(\sqrt[4]{81})^5}=\frac{1}{(\sqrt[4]{3^4})^5}=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$

【別解】 $81^{-\frac{5}{4}}=(3^4)^{-\frac{5}{4}}=3^{-5}=\frac{1}{243}$

(4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{4}\right)^3}=\frac{5}{4}$

【別解】 $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{4}$

(5) $0.01^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{0.01^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(\sqrt{0.01})^3}=\frac{1}{0.1^3}=\frac{1}{0.001}=1000$

【別解】 $0.01^{-\frac{3}{2}}=(0.1^2)^{-\frac{3}{2}}=0.1^{-3}=(10^{-1})^{-3}=10^3=1000$

4 . 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{16}$ (2) $\sqrt[3]{343}$ (3) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ (4) $\sqrt[5]{0.00001}$

(5) $\sqrt[6]{4^3}$ (6) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}$ (7) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$ (8) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$

【解答】 (1) 2 (2) 7 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 0.1 (5) 2 (6) 3 (7) $2\sqrt[3]{2}$
(8) 2

【解説】

(1) $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$
(2) $\sqrt[3]{343}=\sqrt[3]{7^3}=7$
(3) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}$
(4) $\sqrt[5]{0.00001}=\sqrt[5]{0.1^5}=0.1$
(5) $\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$
(6) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times27}=\sqrt[4]{3^4}=3$
(7) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{48}{3}}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{2^3\cdot2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$
(8) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}=4^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}\sqrt[4]{256}=8^{\frac{1}{4}}=2$

5 . 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{-125}$ (2) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$ (3) $\sqrt[3]{-0.008}$

【解答】 (1) -5 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) -0.2

【解説】

(1) $\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$
(2) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}=-\frac{1}{2}$
(3) $\sqrt[3]{-0.008}=\sqrt[3]{(-0.2)^3}=-0.2$

6 . 次の計算をせよ。

(1) $2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}\div2^{\frac{1}{3}}$ (2) $(9^{\frac{2}{3}}\times3^{-2})^{\frac{9}{2}}$ (3) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$
(4) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}$ (5) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[8]{25}\div\sqrt[12]{5}$

【解答】 (1) 1 (2) $\frac{1}{27}$ (3) 2 (4) 3 (5) $\sqrt{5}$

【解説】

(1) $2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}\div2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=2^0=1$
(2) $(9^{\frac{2}{3}}\times3^{-2})^{\frac{9}{2}}=\{(3^2)^{\frac{2}{3}}\times3^{-2}\}^{\frac{9}{2}}=(3^{\frac{4}{3}-2})^{\frac{9}{2}}=(3^{-\frac{2}{3}})^{\frac{9}{2}}=3^{-3}=\frac{1}{27}$
(3) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$
(4) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^1=3$
(5) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[8]{25}\div\sqrt[12]{5}=5^{\frac{1}{3}}\times(5^2)^{\frac{1}{8}}\div5^{\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{4}}\div5^{\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

7 . 次の計算をせよ。ただし、 $a>0$ とする。

(1) $27^{\frac{1}{3}}\times25^{\frac{3}{2}}$ (2) $a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{3}}$ (3) $(a^2\times\sqrt[3]{a^2})^{\frac{1}{4}}$

【解答】 (1) 375 (2) $a^{\frac{1}{6}}$ (3) $a^{\frac{2}{5}}$

【解説】

(1) $27^{\frac{1}{3}}\times25^{\frac{3}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times(5^2)^{\frac{3}{2}}=3^{3^{\frac{1}{3}}}\times5^{2^{\frac{3}{2}}}=3^1\times5^3=375$
(2) $a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}$
(3) $(a^2\times\sqrt[3]{a^2})^{\frac{1}{4}}=(a^2\times a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}=(a^{2+\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{5}}$

8 . 次の計算をせよ。

(1) $2^0\div2^{-4}$ (2) $\sqrt[4]{64}\div\sqrt[4]{4}$ (3) $0.125^{-\frac{2}{3}}$ (4) $(8^{\frac{1}{2}}\times4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$

(5) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$ (6) $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{2}}\div5^{-3}$ (7) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{32}}$

【解答】 (1) 16 (2) 2 (3) 4 (4) 2 (5) $3\sqrt[3]{2}$ (6) 8 (7) 2

【解説】

(1) $2^0\div2^{-4}=2^{0-(-4)}=2^4=16$
(2) $\sqrt[4]{64}\div\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{\frac{64}{4}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$
(3) $0.125^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{0.125^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{0.125})^2}=\frac{1}{(\sqrt[3]{0.5^3})^2}=\frac{1}{0.5^2}=4$

【別解】 $0.125^{-\frac{2}{3}}=(0.5^3)^{-\frac{2}{3}}=0.5^{-2}=4$

(4) $(8^{\frac{1}{2}}\times4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=\{(2^3)^{\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$
(5) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\frac{54}{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(6) $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{2}}\div5^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}}\times5^3=\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\times5^3=\frac{2^3}{5^3}\times5^3=8$

(7) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{32}}=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{32}=\sqrt[6]{2\times32}=\sqrt[6]{2^6}=2$

【別解】 $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \times \{(32)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} \times (2^5)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{1}{6} + \frac{5}{6}} = 2$

9. 次の計算をせよ。

$$\begin{array}{ll} (1) \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{-24} & (2) \sqrt[3]{\sqrt{32}} \times \sqrt{8} \div \sqrt[3]{-16} \\ (3) \sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{-2} + \sqrt[3]{16} & (4) \frac{8}{3}\sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \end{array}$$

【解答】 (1) $2\sqrt[3]{3}$ (2) -2 (3) 0 (4) $\sqrt[3]{3}$

【解説】

$$\begin{aligned} (1) \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{-24} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} - (-\sqrt[3]{3}) - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} \\ &= 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = (3+1-2)\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

【参考】 n が奇数のとき $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[3]{\sqrt{32}} \times \sqrt{8} \div \sqrt[3]{-16} &= 32^{\frac{1}{6}} \times 8^{\frac{1}{2}} \div (-16^{\frac{1}{3}}) = (2^5)^{\frac{1}{6}} \times (2^3)^{\frac{1}{2}} \div \{-(2^4)^{\frac{1}{3}}\} \\ &= 2^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times (-2^{-\frac{4}{3}}) = -2^{\frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3}} = -2^1 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{-2} + \sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + 5 \cdot (-\sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} \\ &= 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = (3-5+2)\sqrt[3]{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \frac{8}{3}\sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} &= \frac{8}{3}\sqrt[3]{3^2} + (-\sqrt[3]{2^3 \cdot 3}) + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \\ &= \frac{8}{3}3^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 3}} \\ &= \frac{8}{3}3^{\frac{1}{3}} - 2\sqrt[3]{3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} \\ &= \frac{8}{3}\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

10. 次の式を簡単にせよ。ただし、 $a > 0$, $b > 0$ とする。

$$\begin{array}{ll} (1) (a - b^{-1}) \div (a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}) & \\ (2) (a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) & \end{array}$$

【解答】 (1) $a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}$ (2) $a - b$

【解説】

$$\begin{aligned} (1) (a - b^{-1}) \div (a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{-\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) a^{\frac{1}{6}} = A, b^{\frac{1}{6}} = B \text{ とおくと} \\ (\text{与式}) &= (A^2 + AB + B^2)(A^2 - AB + B^2) \times (A^2 - B^2) \\ &= (A^2 + AB + B^2)(A^2 - AB + B^2) \times (A+B)(A-B) \\ &= (A+B)(A^2 - AB + B^2) \times (A-B)(A^2 + AB + B^2) \\ &= (A^3 + B^3)(A^3 - B^3) = A^6 - B^6 = (a^{\frac{1}{6}})^6 - (b^{\frac{1}{6}})^6 = a - b \end{aligned}$$

11. 次の式を簡単にせよ。ただし、 $a > 0$, $b > 0$ とする。

$$(1) (a^{\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}) \quad (2) (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a+b)$$

【解答】 (1) $a - b^{-1}$ (2) $a^2 - b^2$

【角度的】

$$\begin{aligned} (1) (a^{\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}) &= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{-\frac{1}{3}})^3 = a - b^{-1} \\ (2) (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a+b) &= \{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a+b) \\ &= (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a+b) \\ &= \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2\}(a+b) \\ &= (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

12. $2^x = 3$ のとき、 $\frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}}$ の値を求めよ。

【解答】 $\frac{91}{9}$

【解説】

$$\begin{aligned} \frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}} &= \frac{(2^x)^3 - (2^{-x})^3}{2^x - 2^{-x}} = \frac{(2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 2^x \cdot 2^{-x} + 2^{-2x})}{2^x - 2^{-x}} \\ &= (2^x)^2 + 1 + (2^x)^{-2} = 3^2 + 1 + \frac{1}{3^2} = \frac{91}{9} \end{aligned}$$

【別解】 $2^x = 3$ より両辺を -1 乗すると $(2^x)^{-1} = 3^{-1}$ つまり $2^{-x} = \frac{1}{3}$

$$\frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{(2^x)^3 - (2^{-x})^3}{2^x - 2^{-x}} = \frac{3^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{27 - \frac{1}{27}}{\frac{8}{3}} = \frac{\frac{728}{27}}{\frac{8}{3}} = \frac{91}{9}$$

13. 次の問いに答えよ。

$$\begin{array}{ll} (1) 2^x - 2^{-x} = 5 \text{ のとき } 2^x + 2^{-x} \text{ の値を求めよ。} & \\ (2) 2^x + 2^{-x} = 4 \text{ のとき, } 2^{2x} + 2^{-2x} \text{ と } 2^{3x} + 2^{-3x} \text{ の値を求めよ。} & \end{array}$$

【解答】 (1) $\sqrt{29}$ (2) $2^{2x} + 2^{-2x} = 14$, $2^{3x} + 2^{-3x} = 52$

【解説】

【参考】 t で置き換えてもよい

$$\begin{aligned} (1) 2^x = t \text{ とおくと } t - \frac{1}{t} &= 5 \\ \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 &= \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 4t \cdot \frac{1}{t} = 5^2 + 4 = 29 \\ t > 0, \frac{1}{t} > 0 \text{ より, } t + \frac{1}{t} > 0 \text{ であるから} \\ t + \frac{1}{t} &= \sqrt{29} \\ \text{すなわち } 2^x + 2^{-x} &= \sqrt{29} \\ (2) 2^x = t \text{ とおくと } t + \frac{1}{t} &= 4 \\ 2^{2x} + 2^{-2x} &= t^2 + \frac{1}{t^2} \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2t \cdot \frac{1}{t} = 4^2 - 2 = 14 \\ 2^{3x} + 2^{-3x} &= t^3 + \frac{1}{t^3} \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3t \cdot \frac{1}{t} \left(t + \frac{1}{t}\right) = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} 14. (1) a > 0, a^x = 2 \text{ のとき, } (a^{3x} + a^{-3x}) \div (a^x + a^{-x}) \text{ の値を求めよ。} & \\ (2) 2^x - 2^{-x} = 1 \text{ のとき, } 4^x + 4^{-x}, 8^x - 8^{-x}, 16^x + 16^{-x} \text{ の値を求めよ。} & \end{array}$$

【解答】 (1) $\frac{13}{4}$ (2) 順に $3, 4, 7$

【解説】

$$\begin{aligned} (1) (a^{3x} + a^{-3x}) \div (a^x + a^{-x}) &= \frac{(a^x)^3 + (a^{-x})^3}{a^x + a^{-x}} \\ &= \frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} - a^x \cdot a^{-x} + a^{-2x})}{a^x + a^{-x}} \\ &= (a^x)^2 - 1 + (a^x)^{-2} = 2^2 - 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ ヒント } A^2 + B^2 &= (A+B)^2 - 2AB \\ A^3 + B^3 &= (A+B)^3 - 3AB(A+B) \text{ または } A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \\ A^4 + B^4 &= (A^2 + B^2)^2 - 2A^2B^2 \\ \text{ここで } B &\text{ を } -B \text{ にかえると} \\ A^2 + B^2 &= (A-B)^2 + 2AB \text{ また } A^3 - B^3 = (A-B)^3 + 3AB(A-B) \\ &\text{が成り立つ。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^x + 4^{-x} &= (2^2)^x + (2^2)^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = (2^x - 2^{-x})^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} \\ &= (2^x - 2^{-x})^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3 \\ 8^x - 8^{-x} &= (2^3)^x - (2^3)^{-x} = (2^x)^3 - (2^{-x})^3 = (2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 2^x \cdot 2^{-x} + 2^{-2x}) \\ &= (2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 2^{-2x} + 1) = 1 \cdot (3 + 1) = 4 \\ 16^x + 16^{-x} &= (2^4)^x + (2^4)^{-x} \\ &= \{(2^x)^2 + (2^{-x})^2\}^2 - 2(2^x)^2(2^{-x})^2 \\ &= (4^x + 4^{-x})^2 - 2(2^x 2^{-x})^2 = 3^2 - 2 \cdot 1^2 = 7 \end{aligned}$$

15. $x < 0$ とする。 $3^x + 3^{-x} = 4$ のとき、 $3^x - 3^{-x}$, $9^x - 9^{-x}$, $27^x - 27^{-x}$ の値を求めよ。

【解答】 順に $-2\sqrt{3}$, $-8\sqrt{3}$, $-30\sqrt{3}$

【解説】

$$\begin{aligned} \text{ヒント } (A-B)^2 &= (A+B)^2 - 4AB \text{ を用いる。} 3^x \text{ と } 3^{-x} \text{ の大小関係に注意} \\ (3^x - 3^{-x})^2 &= (3^x + 3^{-x})^2 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} \\ &= (3^x + 3^{-x})^2 - 4 \cdot 1 = 4^2 - 4 = 12 \end{aligned}$$

よって $(3^x - 3^{-x})^2 = 12$ より $3^x - 3^{-x} = \pm\sqrt{12}$ である

ここで、 $x < 0$ であるから 3^{-x} の方が 3^x よりも大きい

つまり、 $3^x - 3^{-x}$ は負の数となる

以上より、 $3^x - 3^{-x} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$

また $9^x - 9^{-x} = (3^x)^2 - (3^{-x})^2 = (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x})$ より

$$9^x - 9^{-x} = 4 \cdot (-2\sqrt{3}) = -8\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{そして } 27^x - 27^{-x} &= (3^x)^3 - (3^{-x})^3 = (3^x - 3^{-x})^3 + 3 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} (3^x - 3^{-x}) \\ &= (-2\sqrt{3})^3 + 3 \cdot 1 \cdot (-2\sqrt{3}) \\ &= -24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -30\sqrt{3} \end{aligned}$$