数学演習（指数関数）Ｈ２７．９．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の関数のグラフをかけ。また，関数 $y=3^x$ のグラフとの位置関係をいえ。

(1) $y=9\cdot 3^x$　　(2) $y=3^{-x+1}$　　(3) $y=3-9^{\frac{x}{2}}$

2 次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $2^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{4}}$, $8^{\frac{1}{8}}$　　(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{125}}$　　(3) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$

3 次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $3^{x+2}=27$　　(2) $4^x-2^{x+2}-32=0$　　(3) $\begin{cases} 3^{2x}-3^y=-6 \\ 3^{2x+y}=27 \end{cases}$

4 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}$　　(2) $2\cdot 4^x-17\cdot 2^x+8<0$　　(3) $25^x-3\cdot 5^x-10\geqq 0$

5 (1)　関数 $y=4^{x+1}-2^{x+2}+2$ $(x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　関数 $y=6(2^{x}+2^{-x})-2(4^{x}+4^{-x})$ について，$2^{x}+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t を用いて表せ。また，y の最大値を求めよ。

6 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$8^{x}-3\cdot 4^{x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$

(2)　$2(3^{x}+3^{-x})-5(9^{x}+9^{-x})+6=0$

(3)　$2^{x-4}<8^{1-2x}<4^{x+1}$

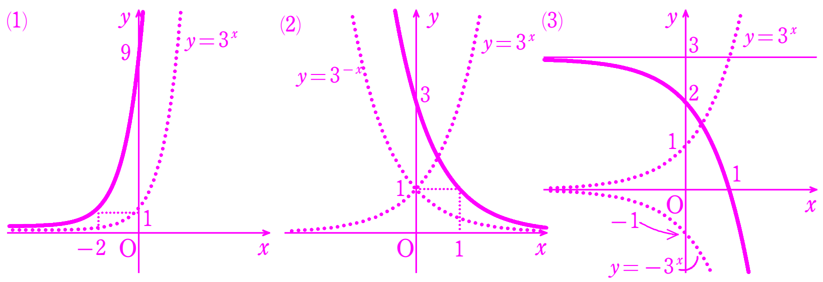
7 a は定数とする。$0\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $y=-4^{-x}+a\cdot 2^{-x}+2$ が最大となる x の値と，そのときの最大値を求めよ。

数学演習（指数関数）Ｈ２７．９．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 次の関数のグラフをかけ。また，関数 $y=3^x$ のグラフとの位置関係をいえ。

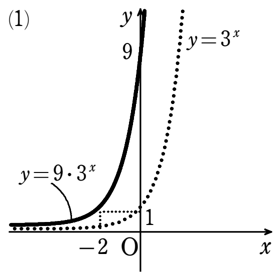
(1) $y=9\cdot3^x$　　(2) $y=3^{-x+1}$　　(3) $y=3-9^{\frac{x}{2}}$

解答 (1) ［図］ $y=3^x$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したもの
(2) ［図］ $y=3^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの
(3) ［図］ $y=3^x$ のグラフを x 軸に関して対称移動し，更に y 軸方向に 3 だけ平行移動したもの

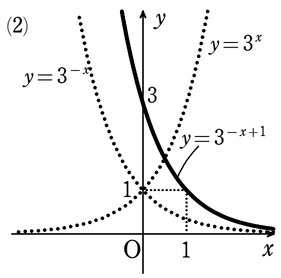


解説

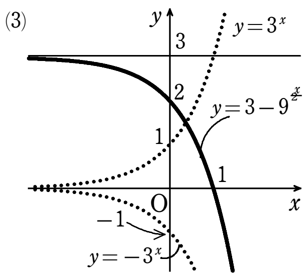
(1) $y=9\cdot3^x=3^2\cdot3^x=3^{x+2}$
したがって，$y=9\cdot3^x$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。
よって，そのグラフは図 (1) の太い実線のようになる。



(2) $y=3^{-x+1}=3^{-(x-1)}$
したがって，$y=3^{-x+1}$ のグラフは，$y=3^{-x}$ のグラフをx軸方向に 1 だけ平行移動したもの，すなわち $y=3^x$のグラフを y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。
よって，そのグラフは図 (2) の太い実線のようになる。



(3) $y=3-9^{\frac{x}{2}}=-(3^2)^{\frac{x}{2}}+3=-3^x+3$
したがって，$y=3-9^{\frac{x}{2}}$ のグラフは，$y=-3^x$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動したもの，すなわち $y=3^x$ のグラフを x 軸に関して対称移動し，更に y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。よって，そのグラフは図 (3) の太い実線のようになる。



2 次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $2^{\frac12}$，$4^{\frac14}$，$8^{\frac18}$　　(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$，$\frac{1}{\sqrt5}$，$\sqrt[4]{\frac{1}{125}}$　　(3) $\sqrt2$，$\sqrt[3]3$，$\sqrt[6]6$

解答 (1) $8^{\frac18}<2^{\frac12}=4^{\frac14}$　(2) $\sqrt[4]{\frac{1}{125}}<\sqrt[3]{\frac{1}{25}}<\frac{1}{\sqrt5}$　(3) $\sqrt[6]6<\sqrt2<\sqrt[3]3$

解説

(1) $2^{\frac12}$，$4^{\frac14}=(2^2)^{\frac14}=2^{\frac12}$，$8^{\frac18}=(2^3)^{\frac18}=2^{\frac38}$
底 2 は 1 より大きいから，$\frac12=\frac12>\frac38$ より　$8^{\frac18}<2^{\frac12}=4^{\frac14}$

(2) $\sqrt[3]{\frac1{25}}=\sqrt[3]{\left(\frac15\right)^2}=\left(\frac15\right)^{\frac23}$，$\frac1{\sqrt5}=\sqrt{\frac15}=\left(\frac15\right)^{\frac12}$，$\sqrt[4]{\frac1{125}}=\sqrt[4]{\left(\frac15\right)^3}=\left(\frac15\right)^{\frac34}$
底 $\frac15$ は 1 より小さいから，$\frac12<\frac23<\frac34$ より
$\left(\frac15\right)^{\frac34}<\left(\frac15\right)^{\frac23}<\left(\frac15\right)^{\frac12}$　すなわち　$\sqrt[4]{\frac1{125}}<\sqrt[3]{\frac1{25}}<\frac1{\sqrt5}$

(3) $(\sqrt2)^6=\left(2^{\frac12}\right)^6=2^3=8$，$(\sqrt[3]3)^6=\left(3^{\frac13}\right)^6=3^2=9$，$(\sqrt[6]6)^6=6$
$6<8<9$ であるから　$(\sqrt[6]6)^6<(\sqrt2)^6<(\sqrt[3]3)^6$
$\sqrt[6]6>0$，$\sqrt2>0$，$\sqrt[3]3>0$ であるから　$\sqrt[6]6<\sqrt2<\sqrt[3]3$

3 次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $3^{x+2}=27$　　(2) $4^x-2^{x+2}-32=0$　　(3) $\begin{cases}3^{2x}-3^y=-6\\3^{2x+y}=27\end{cases}$

解答 (1) $x=1$　(2) $x=3$　(3) $x=\frac12$，$y=2$

解説

(1) $3^{x+2}=27$ から　$3^{x+2}=3^3$
よって　$x+2=3$　ゆえに　$x=1$

(2) 与式から　$(2^x)^2-2^2\cdot2^x-32=0$
$2^x=X$ とおくと　$X>0$　方程式は　$X^2-4X-32=0$
ゆえに　$(X+4)(X-8)=0$　よって　$X=-4,\ 8$
$X>0$ であるから　$X=8$　すなわち　$2^x=8$
ゆえに　$2^x=2^3$　よって　$x=3$

(3) $3^{2x}=X$，$3^y=Y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$
連立方程式は　$\begin{cases}X-Y=-6 & \cdots\cdots ①\\ XY=27 & \cdots\cdots ②\end{cases}$
① から　$Y=X+6$　…… ③
③ を ② に代入して　$X(X+6)=27$
ゆえに　$X^2+6X-27=0$　よって　$(X-3)(X+9)=0$
$X>0$ であるから　$X=3$
これを ③ に代入して　$Y=9$　($Y>0$ を満たす)
$X=3$ から　$3^{2x}=3$　$Y=9$ から　$3^y=3^2$
したがって　$x=\frac12$，$y=2$

4 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac12\right)^{2x+2}<\left(\frac1{16}\right)^{x-1}$　　(2) $2\cdot4^x-17\cdot2^x+8<0$　　(3) $25^x-3\cdot5^x-10\geqq0$

解答 (1) $x<3$　(2) $-1<x<3$　(3) $x\geqq1$

解説

(1) $\left(\frac12\right)^{2x+2}<\left(\frac1{16}\right)^{x-1}$ から　$\left(\frac12\right)^{2x+2}<\left(\frac12\right)^{4(x-1)}$
底 $\frac12$ は 1 より小さいから　$2x+2>4(x-1)$
これを解いて　$x<3$

(2) 与式から　$2\cdot(2^x)^2-17\cdot2^x+8<0$
$2^x=X$ とおくと　$X>0$
不等式は　$2X^2-17X+8<0$
したがって　$(2X-1)(X-8)<0$
これを解いて　$\frac12<X<8$　($X>0$ を満たす)
ゆえに　$\frac12<2^x<8$　すなわち　$2^{-1}<2^x<2^3$
底 2 は 1 より大きいから　$-1<x<3$

(3) 与式から　$(5^x)^2-3\cdot5^x-10\geqq0$
$5^x=X$ とおくと　$X>0$
不等式は　$X^2-3X-10\geqq0$
したがって　$(X+2)(X-5)\geqq0$
$X+2>0$ であるから　$X-5\geqq0$　すなわち　$X\geqq5$
ゆえに　$5^x\geqq5$　底 5 は 1 より大きいから　$x\geqq1$

5 (1) 関数 $y=4^{x+1}-2^{x+2}+2$ ($x\leqq2$) の最大値と最小値を求めよ。
(2) 関数 $y=6(2^x+2^{-x})-2(4^x+4^{-x})$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t を用いて表せ。また，y の最大値を求めよ。

解答 (1) $x=2$ のとき最大値 50，$x=-1$ のとき最小値 1
(2) $y=-2t^2+6t+4$，$x=0$ のとき最大値 8

解説

(1) $2^x=t$ とおくと　$t>0$　$x\leqq2$ であるから　$0<t\leqq2^2$
したがって　$0<t\leqq4$　…… ①
y を t の式で表すと　$y=4(2^x)^2-4\cdot2^x+2=4t^2-4t+2=4\left(t-\frac12\right)^2+1$
① の範囲において，y は $t=4$ で最大，$t=\frac12$ で最小となる。
$t=4$ のとき　$2^x=4$　ゆえに　$x=2$
$t=\frac12$ のとき　$2^x=\frac12$　ゆえに　$x=-1$
よって　$x=2$ のとき最大値 50，$x=-1$ のとき最小値 1

(2) $4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=t^2-2$
したがって　$y=6t-2(t^2-2)=-2t^2+6t+4$　…… ①

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均)より

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

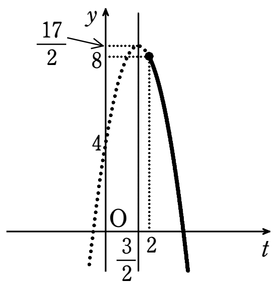
すなわち　$t\geqq 2$　……②

ここで，等号は $2^x=2^{-x}$，すなわち $x=-x$ から $x=0$ のとき成り立つ。

① から　$y=-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{17}{2}$

② の範囲において，y は $t=2$ のとき最大値 8 をとる。

したがって　$x=0$ のとき最大値 8



6 次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$　　(2) $2(3^x+3^{-x})-5(9^x+9^{-x})+6=0$

(3) $2^{x-4}<8^{1-2x}<4^{x+1}$

解答　(1) $x=0,\ 2$　　(2) $x=0$　　(3) $\dfrac{1}{8}<x<1$

解説

(1) 方程式から　$(2^x)^3-3\cdot(2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$　　方程式は　$X^3-3X^2-6X+8=0$

ゆえに　$(X-1)(X+2)(X-4)=0$

$X>0$ であるから　$X=1,\ 4$

$X=1$ のとき　$2^x=1$　　ゆえに　$x=0$

$X=4$ のとき　$2^x=4$　　ゆえに　$x=2$

したがって　$x=0,\ 2$

(2) $3^x+3^{-x}=t$ とおくと　$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$

方程式は　$2t-5(t^2-2)+6=0$　　整理して　$5t^2-2t-16=0$

ゆえに　$(t-2)(5t+8)=0$　……①

ここで，$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$t=3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2\quad \cdots\cdots ②$$

等号は $3^x=3^{-x}$，すなわち $x=-x$ から $x=0$ のとき成り立つ。

$t\geqq 2$ から　$5t+8>0$　　よって，① から　$t-2=0$　すなわち　$t=2$

$t=2$ となるのは，② で等号が成り立つ場合であるから，求める解は　$x=0$

(3) $8^{1-2x}=(2^3)^{1-2x}=2^{3-6x}$，$4^{x+1}=(2^2)^{x+1}=2^{2x+2}$ であるから，不等式は

$$2^{x-4}<2^{3-6x}<2^{2x+2}$$

底 2 は 1 より大きいから　$x-4<3-6x<2x+2$

$x-4<3-6x$ から　$x<1$　……①

$3-6x<2x+2$ から　$\dfrac{1}{8}<x$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$\dfrac{1}{8}<x<1$

7 a は定数とする。$0\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $y=-4^{-x}+a\cdot 2^{-x}+2$ が最大となる x の値と，そのときの最大値を求めよ。

解答　$a<1$ のとき $x=1$ で最大値 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}$，

$1\leqq a\leqq 2$ のとき $x=1-\log_2 a$ で最大値 $\dfrac{a^2}{4}+2$，

$2<a$ のとき $x=0$ で最大値 $a+1$

解説

$2^{-x}=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$　……①

y を t の式で表すと，$4^{-x}=(2^2)^{-x}=(2^{-x})^2=t^2$ であるから

$$y=-t^2+at+2=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+2$$

この関数のグラフは，上に凸の放物線で，軸は直線 $t=\dfrac{a}{2}$，頂点は点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}+2\right)$ である。

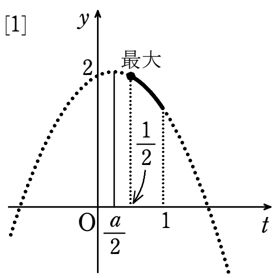
グラフの軸が区間 ① の左外，内，右外にある場合に分けると

[1] $\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a<1$ のとき

y は $t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}$ をとる。

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$2^{-x}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$x=1$

[1]



[2] $\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1$　すなわち　$1\leqq a\leqq 2$ のとき

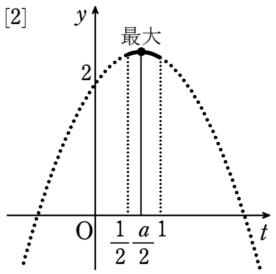
y は $t=\dfrac{a}{2}$ で最大値 $\dfrac{a^2}{4}+2$ をとる。

$t=\dfrac{a}{2}$ のとき　$2^{-x}=\dfrac{a}{2}$

ゆえに　$2^x=\dfrac{2}{a}$

よって　$x=\log_2\dfrac{2}{a}=1-\log_2 a$

[2]



[3] $1<\dfrac{a}{2}$　すなわち　$a>2$ のとき

y は $t=1$ で最大値 $a+1$ をとる。

$t=1$ のとき　$2^{-x}=1$

よって　$x=0$

以上から

$a<1$ のとき $x=1$ で最大値 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}$，

$1\leqq a\leqq 2$ のとき $x=1-\log_2 a$ で最大値 $\dfrac{a^2}{4}+2$，

$2<a$ のとき $x=0$ で最大値 $a+1$

[3]