

1

次の計算をせよ。ただし、 $a>0$ 、 $b>0$ とする。

(1)

$4^5\times 2^{-8}\div 8^{-2}$

(2)

$(a^{-1})^3\times a^7\div a^2$

(3)

$(a^2b^{-1})^3\div (ab^{-2})^2$

(4)

$\sqrt[3]{9}\times \sqrt[3]{81}$

(5)

$\sqrt[3]{5}\div \sqrt[12]{5}\times \sqrt[8]{25}$

(6)

$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-16}$

(7)

$\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b}}\times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}}\times \sqrt[3]{a\sqrt{b}}$

2

次の計算をせよ。

(1)

$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

(2)

$0.09^{1.5}$

(3)

$\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

(4)

$\sqrt{2}\div \sqrt[4]{4}\times \sqrt[12]{32}\div \sqrt[6]{2}$

(5)

$\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$

(6)

$\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$

3

(1) $a>0$ 、 $b>0$ とする。次の式を計算せよ。

(ア)

$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$

(イ)

$(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}})$

(2) $a>0$ 、 $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{7}$ のとき、 $a+a^{-1}$ の値を求めよ。

4 (1) 次の式を計算せよ。ただし、 $a>0$ 、 $b>0$ とする。

(ア) $(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ (イ) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2 + (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2$

(ウ) $(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

(2) $x>0$ 、 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ のとき、 $x + x^{-1}$ 、 $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ の値をそれぞれ求めよ。

5 $a>0$ とする。 $9^a + 9^{-a} = 14$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $3^a + 3^{-a}$ (2) $3^a - 3^{-a}$ (3) $27^a + 27^{-a}$ (4) $27^a - 27^{-a}$

6 A 、 B は実数で $A^{11} = 8$ 、 $B^{13} = 4$ であるとする。整数 x 、 y が $A^x \cdot B^y = 2$ を満たすとき、 $|x + y|$ の最小値とそのときの x 、 y の値を求めよ。

1 次の計算をせよ。ただし、 $a>0$ 、 $b>0$ とする。

- (1) $4^5\times 2^{-8}\div 8^{-2}$
- (2) $(a^{-1})^3\times a^7\div a^2$
- (3) $(a^2b^{-1})^3\div (ab^{-2})^2$
- (4) $\sqrt[3]{9}\times \sqrt[3]{81}$
- (5) $\sqrt[3]{5}\div \sqrt[12]{5}\times \sqrt[8]{25}$
- (6) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-16}$
- (7) $\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b}}\times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}}\times \sqrt[3]{a\sqrt{b}}$

【解答】 (1) 256 (2) a^2 (3) a^4b (4) 9 (5) $\sqrt{5}$ (6) 0 (7) a

【解説】

(1) (与式) $= (2^2)^5\times 2^{-8}\div (2^3)^{-2}=2^{10}\times 2^{-8}\div 2^{-6}=2^{10+(-8)-(-6)}=2^8=256$

(2) (与式) $=a^{-3}\times a^7\div a^2=a^{-3+7-2}=a^2$

(3) (与式) $=a^{2\times 3}b^{(-1)\times 3}\div \{a^{1\times 2}b^{(-2)\times 2}\}=a^6b^{-3}\div a^2b^{-4}=a^{6-2}b^{-3-(-4)}=a^4b$

(4) (与式) $= (3^2)^{\frac{1}{3}}\times (3^4)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=3^2=9$

【別解】 (与式) $=\sqrt[3]{9\cdot 81}=\sqrt[3]{3^2\cdot 3^4}=\sqrt[3]{3^{2+4}}=\sqrt[3]{3^6}=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9$

(5) (与式) $=5^{\frac{1}{3}}\div 5^{\frac{1}{12}}\times (5^2)^{\frac{1}{8}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

(6) (与式) $=\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}-(-\sqrt[3]{16})=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}-\sqrt[3]{5^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^3\cdot 2}$
 $=3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}=(3-5+2)\sqrt[3]{2}=0$

(7) (与式) $=a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a^1b^0=a$

2 次の計算をせよ。

- (1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$
- (2) $0.09^{1.5}$
- (3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$
- (4) $\sqrt{2}\div \sqrt[4]{4}\times \sqrt[12]{32}\div \sqrt[6]{2}$
- (5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$
- (6) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$

【解答】 (1) $\frac{16}{81}$ (2) 0.027 (3) 2 (4) $\sqrt[4]{2}$ (5) $\sqrt{2}$ (6) $3\sqrt[3]{3}$

【解説】

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{4}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times(-\frac{4}{3})}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(2) $0.09^{1.5}=0.09^{\frac{3}{2}}=(0.3^2)^{\frac{3}{2}}=0.3^{2\times\frac{3}{2}}=0.3^3=0.027$

【別解】 $0.09^{1.5}=\left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{3}{2}}=\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1000}=0.027$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

【別解】 $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ であるから $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$

(4) $\sqrt{2}\div \sqrt[4]{4}\times \sqrt[12]{32}\div \sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{2}{4}}\times 2^{\frac{5}{12}}\div 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

(5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^0=\sqrt{2}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}$
 $=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$$=\left(2+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$$

3 (1) $a>0$ 、 $b>0$ とする。次の式を計算せよ。

(ア) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$

(イ) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}})$

(2) $a>0$ 、 $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{7}$ のとき、 $a+a^{-1}$ の値を求めよ。

【解答】 (1) (ア) a^2-b (イ) $a-b^{-1}$ (2) $4\sqrt{7}$

【解説】

(1) (ア) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$
 $=\{(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[6]{b})^2\}(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$
 $=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b})\{(\sqrt[3]{a^2})^2+\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\}$
 $=(\sqrt[3]{a^2})^3-(\sqrt[3]{b})^3=a^2-b$

(イ) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}})$

$$=(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{-\frac{1}{4}})^2\}$$

$$=(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})$$

$$=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{-\frac{1}{2}})^2=a-b^{-1}$$

(2) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{3}})^3+(a^{-\frac{1}{3}})^3$
 $=(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-3a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})$
 $=(\sqrt{7})^3-3\cdot 1\cdot \sqrt{7}=4\sqrt{7}$

4 (1) 次の式を計算せよ。ただし、 $a>0$ 、 $b>0$ とする。

(ア) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

(イ) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2+(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2$

(ウ) $(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

(2) $x>0$ 、 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ のとき、 $x+x^{-1}$ 、 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ の値をそれぞれ求めよ。

【解答】 (1) (ア) -1 (イ) $2(a+b)$ (ウ) $a-b$

(2) $x+x^{-1}=3$ 、 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=2\sqrt{5}$

【解説】

(1) (ア) (与式) $=\{(\sqrt[4]{2})^2-(\sqrt[4]{3})^2\}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
 $=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
 $=2-3$
 $=-1$

(イ) (与式) $=(a^{\frac{1}{2}})^2+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+(b^{\frac{1}{2}})^2+(a^{\frac{1}{2}})^2-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+(b^{\frac{1}{2}})^2$
 $=2(a+b)$

(ウ) (与式) $=\{(a^{\frac{1}{6}})^2-(b^{\frac{1}{6}})^2\}(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$$=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^2\}$$

$$=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3=a-b$$

(2) $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$$=(\sqrt{5})^2-2\cdot 1=3$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$$

$$=(\sqrt{5})^3-3\cdot 1\cdot \sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

5 $a>0$ とする。 $9^a+9^{-a}=14$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) 3^a+3^{-a}
- (2) 3^a-3^{-a}
- (3) 27^a+27^{-a}
- (4) 27^a-27^{-a}

【解答】 (1) 4 (2) $2\sqrt{3}$ (3) 52 (4) $30\sqrt{3}$

【解説】

(1) $(3^a+3^{-a})^2=9^a+2\cdot 3^a\cdot 3^{-a}+9^{-a}=14+2\cdot 1=16$
 $3^a+3^{-a}>0$ であるから $3^a+3^{-a}=4$

(2) $(3^a-3^{-a})^2=9^a-2\cdot 3^a\cdot 3^{-a}+9^{-a}=14-2\cdot 1=12$
 $a>0$ より $a>-a$ であり、底 3 は 1 より大きいから $3^a>3^{-a}$
ゆえに $3^a-3^{-a}>0$ よって $3^a-3^{-a}=2\sqrt{3}$

(3) $27^a+27^{-a}=(3^a+3^{-a})(9^a-3^a\cdot 3^{-a}+9^{-a})$
 $=4\cdot (14-1)=52$

(4) $27^a-27^{-a}=(3^a-3^{-a})(9^a+3^a\cdot 3^{-a}+9^{-a})$
 $=2\sqrt{3}(14+1)=30\sqrt{3}$

6 A 、 B は実数で $A^{11}=8$ 、 $B^{13}=4$ であるとする。整数 x 、 y が $A^x\cdot B^y=2$ を満たすとき、 $|x+y|$ の最小値とそのときの x 、 y の値を求めよ。

【解答】 $x=11$ 、 $y=-13$ のとき最小値 2

【解説】

$A^{11}=8$ 、 $B^{13}=4$ すなわち $A^{11}=2^3$ 、 $B^{13}=2^2$ から $A=2^{\frac{3}{11}}$ 、 $B=2^{\frac{2}{13}}$

$A^x\cdot B^y=2$ とすると $(2^{\frac{3}{11}})^x\cdot (2^{\frac{2}{13}})^y=2$

よって $2^{\frac{3}{11}x+\frac{2}{13}y}=2^1$ ゆえに $\frac{3}{11}x+\frac{2}{13}y=1$ …… ①

ここで、 $x=11$ 、 $y=-13$ は ① の整数解の 1 つである。

よって $\frac{3}{11}\cdot 11+\frac{2}{13}\cdot (-13)=1$ …… ②

①、② から $\frac{3}{11}(x-11)+\frac{2}{13}(y+13)=0$

すなわち $39(x-11)=-22(y+13)$ …… ③

39 と 22 は互いに素であるから、 k を整数として $x-11=22k$ と表される。

③ に代入して $39\cdot 22k=-22(y+13)$ すなわち $y+13=-39k$

よって、① の解は $x=22k+11$ 、 $y=-39k-13$

ゆえに $|x+y|=|22k+11-39k-13|=|-17k-2|$

したがって、 $|x+y|$ は $k=0$ のとき最小値 2 をとる。

このとき $x=22\cdot 0+11=11$ 、 $y=-39\cdot 0-13=-13$