数学演習（指数関数）Ｈ２１．１０．６

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１. 指数法則を用いて，次の計算をせよ。ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする。

(1) $a^3 \times a^{-4} \div a^{-5}$　　(2) $4^5 \times 2^{-10} \div 8^{-2}$　　(3) $(\sqrt[4]{5})^8$　　(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

２. 次の値を求めよ。

(1) $8^{\frac{1}{3}}$　　(2) $125^{\frac{2}{3}}$　　(3) $4^{-\frac{3}{2}}$　　(4) $0.04^{1.5}$　　(5) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

３. 次の計算をせよ。

(1) $8^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}}$　　(2) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$　　(3) $\left(3^{-2} \times 9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(4) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{8}$　　(5) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[12]{5} \times \sqrt[8]{25}$　　(6) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$

(7) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$

４. (1) $3^x + 3^{-x} = 4$ のとき　$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} =$ ア $\boxed{}$，$3^{\frac{3}{2}x} + 3^{-\frac{3}{2}x} =$ イ $\boxed{}$

(2) $2^x - 2^{-x} = 1$ のとき　$2^x + 2^{-x} =$ ウ $\boxed{}$，$4^x + 4^{-x} =$ エ $\boxed{}$，$8^x + 8^{-x} =$ オ $\boxed{}$

5. $y=3^x$ のグラフをもとにして，次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　　(2)　$y=-3^x$

6. 次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$2,\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{64}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}},\ 1,\ \dfrac{1}{9}$　　(3)　$2^{30},\ 3^{20},\ 10^{10}$

7. 次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+1}=3$　　(2)　$4^{2x-1}=2^{3x-5}$

(3)　$2^{x-2}\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　　(4)　$\dfrac{1}{3^{2x}}\leqq 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$

8. 次の方程式を解け。　$9^x-2\cdot 3^{x+1}-27=0$

9. 関数 $y=2^{x+1}-4^x+10$ $(x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ。

１．指数法則を用いて，次の計算をせよ。ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする。

(1) $a^3 \times a^{-4} \div a^{-5}$　(2) $4^5 \times 2^{-10} \div 8^{-2}$　(3) $(\sqrt[4]{5})^8$　(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

解答　(1) a^4　(2) 64　(3) 25　(4) 3

(1) $a^3 \times a^{-4} \div a^{-5} = a^{3+(-4)} \div a^{-5} = a^{-1} \div a^{-5} = a^{-1-(-5)} = a^4$

(2) $4^5 \times 2^{-10} \div 8^{-2} = (2^2)^5 \times 2^{-10} \div (2^3)^{-2} = 2^{10} \times 2^{-10} \div 2^{-6}$
$= 2^{10+(-10)-(-6)} = 2^6 = 64$

(3) $(\sqrt[4]{5})^8 = \sqrt[4]{5^8} = \sqrt[4]{25^4} = 25$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[2\times 3]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

２．次の値を求めよ。

(1) $8^{\frac{1}{3}}$　(2) $125^{\frac{2}{3}}$　(3) $4^{-\frac{3}{2}}$　(4) $0.04^{1.5}$　(5) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

解答　(1) 2　(2) 25　(3) $\dfrac{1}{8}$　(4) 0.008　(5) $\dfrac{16}{81}$

(1) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(2) $125^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{125})^2 = (\sqrt[3]{5^3})^2 = 5^2 = 25$

(3) $4^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(\sqrt{4})^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

(4) $0.04^{1.5} = 0.04^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{0.04})^3 = 0.2^3 = 0.008$

(5) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}\right)^4} = \dfrac{1}{\left\{\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}\right\}^4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^4} = \dfrac{16}{81}$

別解　(1) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} = 2$

(2) $125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3\times\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$

(3) $4^{-\frac{3}{2}} = (2^2)^{-\frac{3}{2}} = 2^{2\times(-\frac{3}{2})} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

(4) $0.04^{1.5} = (0.2^2)^{\frac{3}{2}} = 0.2^{2\times\frac{3}{2}} = 0.2^3 = 0.008$

(5) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{4}{3}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3\times(-\frac{4}{3})} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^4} = \dfrac{16}{81}$

３．次の計算をせよ。

(1) $8^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}}$　(2) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$　(3) $\left(3^{-2} \times 9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(4) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{8}$　(5) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[12]{5} \times \sqrt[8]{25}$　(6) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$

(7) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$

解答　(1) 32　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{3}$　(4) 2　(5) $\sqrt{5}$　(6) $3\sqrt{2}$　(7) $4\sqrt[3]{2}$

(1) $8^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

(2) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = 2^0 = 1$

(3) $\left(3^{-2} \times 9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left\{3^{-2} \times (3^2)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} = \left(3^{-2+\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

(4) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{8} = 4^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2$

(5) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[12]{5} \times \sqrt[8]{25} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{1}{12}} \times 25^{\frac{1}{8}} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{1}{12}} \times (5^2)^{\frac{1}{8}}$
$= 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

(6) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6} = (2\cdot 3)^{\frac{1}{2}} \times (2\cdot 3^3)^{\frac{1}{4}} \times (2\cdot 3)^{-\frac{1}{4}}$
$= \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}\right) \times \left(2^{-\frac{1}{4}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}}\right)$
$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3 = 3\sqrt{2}$

別解　(与式) $= \sqrt{6} \times \sqrt[4]{\dfrac{54}{6}} = \sqrt{6} \times \sqrt[4]{9} = \sqrt{6} \times \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

(7) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2\cdot 3^3} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2}$
$= 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2}$
$= (3-1+2)\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

４．(1) $3^x + 3^{-x} = 4$ のとき　$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = $ ア $\boxed{}$，$3^{\frac{3}{2}x} + 3^{-\frac{3}{2}x} = $ イ $\boxed{}$

(2) $2^x - 2^{-x} = 1$ のとき　$2^x + 2^{-x} = $ ウ $\boxed{}$，$4^x + 4^{-x} = $ エ $\boxed{}$，$8^x + 8^{-x} = $ オ $\boxed{}$

解答　(ア) $\sqrt{6}$　(イ) $3\sqrt{6}$　(ウ) $\sqrt{5}$　(エ) 3　(オ) $2\sqrt{5}$

(1) (ア) $\left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2 + 2\cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{-\frac{x}{2}} + \left(3^{-\frac{x}{2}}\right)^2$
$= 3^x + 2\cdot 1 + 3^{-x} = 3^x + 3^{-x} + 2$
$= 4 + 2 = 6$

$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} > 0$ であるから　$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = \sqrt{6}$

(イ) $3^{\frac{3}{2}x} + 3^{-\frac{3}{2}x} = \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^3 + \left(3^{-\frac{x}{2}}\right)^3$
$= \left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}}\right)^3 - 3\cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{-\frac{x}{2}}\left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}}\right)$
$= (\sqrt{6})^3 - 3\cdot 1\cdot\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

(2) (ウ) $(2^x + 2^{-x})^2 = (2^x - 2^{-x})^2 + 4 = 1^2 + 4 = 5$

$2^x + 2^{-x} > 0$ であるから　$2^x + 2^{-x} = \sqrt{5}$

(エ) $4^x + 4^{-x} = 2^{2x} + 2^{-2x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2$
$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2\cdot 2^x \cdot 2^{-x}$
$= (\sqrt{5})^2 - 2\cdot 1 = 3$

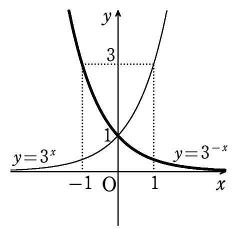
(オ) $8^x + 8^{-x} = 2^{3x} + 2^{-3x} = (2^x)^3 + (2^{-x})^3$
$= (2^x + 2^{-x})^3 - 3\cdot 2^x \cdot 2^{-x}(2^x + 2^{-x})$
$= (\sqrt{5})^3 - 3\cdot 1\cdot\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

５．$y = 3^x$ のグラフをもとにして，次の関数のグラフをかけ。

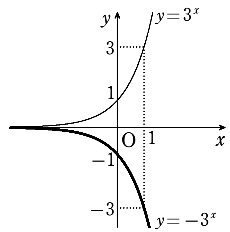
(1) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　(2) $y = -3^x$

解答　(1) [図]　(2) [図]

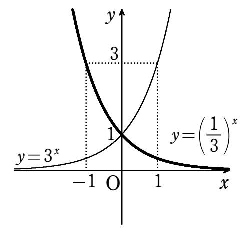
(1)



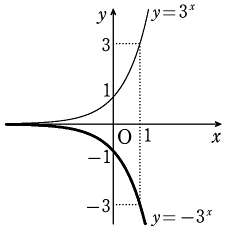
(2)



(1) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフは，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ より $y = 3^x$ のグラフと y 軸に関して対称である。[図]



(2)　$y=-3^x$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフと x 軸に関して対称である。[図]



6. 次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$2,\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{64}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}},\ 1,\ \dfrac{1}{9}$　　(3)　$2^{30},\ 3^{20},\ 10^{10}$

解答　(1)　$\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$　　(2)　$\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}<1$　　(3)　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

(1)　$2=2^1$，$\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[5]{64}=64^{\frac{1}{5}}=(2^6)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{6}{5}}$

$y=2^x$ は増加関数であるから，$\dfrac{2}{3}<1<\dfrac{6}{5}$ より

$2^{\frac{2}{3}}<2^1<2^{\frac{6}{5}}$　すなわち　$\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}}}=3^{-\frac{1}{3}}$，$1=3^0$，$\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3^2}=3^{-2}$

$y=3^x$ は増加関数であるから，$-2<-\dfrac{1}{3}<0$ より

$3^{-2}<3^{-\frac{1}{3}}<3^0$　すなわち　$\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}<1$

別解　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$，$\dfrac{1}{9}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ は減少関数であるから，$0<\dfrac{1}{3}<2$ より

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$　すなわち　$\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}<1$

(3)　$2^{30}=2^{3\times10}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=3^{2\times10}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$8<9<10$ であるから　$8^{10}<9^{10}<10^{10}$　すなわち　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

7. 次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+1}=3$　　(2)　$4^{2x-1}=2^{3x-5}$

(3)　$2^{x-2}\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　　(4)　$\dfrac{1}{3^{2x}}\leqq3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$

解答　(1)　$x=-\dfrac{3}{4}$　　(2)　$x=-3$　　(3)　$x\geqq\dfrac{1}{2}$　　(4)　$x\geqq-\dfrac{2}{3}$

(1)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+1}=\left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{2x+1}=(3^{-2})^{2x+1}=3^{-4x-2}$ であるから，方程式は　$3^{-4x-2}=3$

ゆえに　$-4x-2=1$　　よって　$x=-\dfrac{3}{4}$

(2)　$4^{2x-1}=(2^2)^{2x-1}=2^{4x-2}$ であるから，方程式は　$2^{4x-2}=2^{3x-5}$

ゆえに　$4x-2=3x-5$　　よって　$x=-3$

(3)　$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\cdot2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=2^{-\frac{3}{2}}$ であるから，不等式は　$2^{x-2}\geqq2^{-\frac{3}{2}}$

底 2 は 1 より大きいから　$x-2\geqq-\dfrac{3}{2}$

これを解いて　$x\geqq\dfrac{1}{2}$

(4)　$\dfrac{1}{3^{2x}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$，$3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x-1}$ であるから，

不等式は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x-1}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$2x\geqq\dfrac{1}{2}x-1$

これを解いて　$x\geqq-\dfrac{2}{3}$

8. 次の方程式を解け。　$9^x-2\cdot3^{x+1}-27=0$

解答　$x=2$

方程式から　$(3^x)^2-2\cdot3\cdot3^x-27=0$

$3^x=t$ とおくと　$t>0$　……①

方程式は　$t^2-6t-27=0$

ゆえに　$(t+3)(t-9)=0$

① より，$t+3>0$ であるから　$t=9$

$t=9$ のとき　$3^x=9$　　よって　$x=2$

9. 関数 $y=2^{x+1}-4^x+10$ $(x\leqq2)$ の最大値と最小値を求めよ。

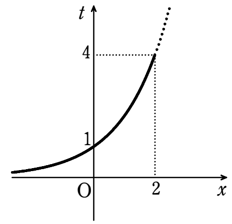
解答　$x=0$ のとき最大値 11，$x=2$ のとき最小値 2

$y=2^{x+1}-4^x+10=2\cdot2^x-(2^x)^2+10$

$2^x=t$ とおくと　$x\leqq2$ のとき

$0<t\leqq2^2$

すなわち　$0<t\leqq4$　……①



y を t の式で表すと

$y=2t-t^2+10$

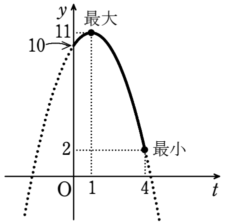
$=-t^2+2t+10$

$=-(t-1)^2+11$

① の範囲において，y は

$t=1$ のとき最大値 11，$t=4$ のとき最小値 2

をとる。



$t=1$ のとき，$2^x=1$ から　$x=0$

$t=4$ のとき，$2^x=4$ から　$x=2$

したがって，y は

$x=0$ のとき最大値 11，$x=2$ のとき最小値 2

をとる。