数学演習（指数関数）Ｈ２１．１．９　　(　)組(　)番　名前(　　　)

１. 次の計算をせよ。

(1) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}c^{-1}\div\left(b^{-\frac{1}{4}}c^{-\frac{5}{4}}\right)^{4}$

(2) $\sqrt[3]{a^3b}\div\sqrt[6]{ab^3}\times\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$

(3) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$

(4) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-81}$

２. 次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x+2^{x+1}-24=0$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$

３. 次の３つの数を，小さい方から順に左から並べよ。

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$

(2) 2^{30} , 10^{10} , 3^{20}

４. $a>0$, $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{7}$ のとき、$a+a^{-1}$ の値を求めよ。

5．関数 $f(x)=2^{2x}-3\cdot2^{x+2}+1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最大値•最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=a$ が異なる 2 個の実数解を持つように，定数 a の値の範囲を求めよ。

6．関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$ のグラフを書け。また，漸近線の方程式を求めよ。

7．関数 $f(x)=9^x+9^{-x}-6(3^x+3^{-x})+1$ について，$t=3^x+3^{-x}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 9^x+9^{-x} を t を用いて表せ。

(2) $t\geqq2$ であることを示せ。また，等号が成り立つときの x の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

1．次の計算をせよ。

(1) $(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}c^{-1}\div(b^{-\frac{1}{4}}c^{-\frac{5}{4}})^4$

$= a^{\frac14}b^{-\frac34}\times a^{\frac34}c^{-1}\times(b^{-\frac14}c^{-\frac54})^{-4}$

$= a^{\frac14}b^{-\frac34}\times a^{\frac34}c^{-1}\times b^1c^5$

$= a^{\frac14+\frac34}b^{-\frac34+1}c^{-1+5} = \underline{ab^{\frac14}c^4}$ ⑤

(2) $\sqrt[3]{a^3b}\div\sqrt[6]{ab^3}\times\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$

$= (a^3b)^{\frac13}\div(ab^3)^{\frac16}\times\{(ab)^{\frac13}\}^{\frac12}$

$= (a^3b)^{\frac13}\times(ab^3)^{-\frac16}\times(ab)^{\frac16}$

$= ab^{\frac13}\times a^{-\frac16}b^{-\frac12}\times a^{\frac16}b^{\frac16} = a^{1-\frac16+\frac16}b^{\frac13-\frac12+\frac16}$ ⑤

$= a^1b^0 = \underline{a}$

(3) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$

$a=\sqrt[3]{5}$, $b=\sqrt[3]{2}$ とおくと

$\sqrt[3]{25}=(\sqrt[3]{5})^2=a^2$

$\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}=ab$

$\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2})^2=b^2$

より

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= a^3-b^3$

$= (\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{2})^3$

$= 5-2 = \underline{3}$ ⑤

(4) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-81}$

$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-81}$

$= \sqrt[3]{2^3\cdot3}-\sqrt[3]{3^3\cdot3}$

$= 2\cdot\sqrt[3]{3}-3\cdot\sqrt[3]{3} = \underline{-\sqrt[3]{3}}$ ⑤

2．次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x+2^{x+1}-24=0$

$t=2^x$ とおくと　$4^x=(2^x)^2=t^2$

$2^{x+1}=2^x\cdot2^1=2t$

∴

$t^2+2t-24=0$

$(t+6)(t-4)=0$

∴ $t=-6, 4$

ここで $t=2^x$ より $t>0$

よって $t=-6$ は不適

∴ $t=4$

よって

$2^x=4$

より

$\underline{x=2}$ ⑩

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\frac{1}{8}\right)^x$

$\left(\frac12\right)^{5x+4}>\left(\frac12\right)^{3x}$

底が1より小さいので (不等号の向きが変わる)

$5x+4<3x$

∴

$2x<-4$

より　$\underline{x<-2}$ ⑤

3．次の３つの数を，小さい方から順に左から並べよ。

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$

(ルートをはずして、整数値にする)

すべて6乗すると

$(\sqrt{2})^6=2^3=8$

$(\sqrt[3]{3})^6=(3^{\frac13})^6=3^2=9$

$(\sqrt[6]{7})^6=7$

よって

$\underline{\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}}$ ⑤

(2) 2^{30}, 10^{10}, 3^{20}

(肩をそろえる)

$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$

$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

より

$8^{10}<9^{10}<10^{10}$

から

$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

∴

$\underline{2^{30}<3^{20}<10^{10}}$ ⑤

4．$a>0$，$a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{7}$ のとき、$a+a^{-1}$ の値を求めよ。　a^0 より 1.

$a+a^{-1}=(a^{\frac13})^3+(a^{-\frac13})^3$

$=(a^{\frac13}+a^{-\frac13})^3-3\cdot a^{\frac13}\cdot a^{-\frac13}(a^{\frac13}+a^{-\frac13})$

$=(a^{\frac13}+a^{-\frac13})^3-3(a^{\frac13}+a^{-\frac13})$

$=(\sqrt{7})^3-3\sqrt{7}$ ⑤

$=7\sqrt{7}-3\sqrt{7} = \underline{4\sqrt{7}}$

5. 関数 $f(x)=2^{2x}-3\cdot 2^{x+2}+1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。

$t=2^x$ とおくと，$t>0$ であり，また

$2^{2x}=(2^x)^2=t^2$，$2^{x+2}=2^x\cdot 2^2=4t$ である

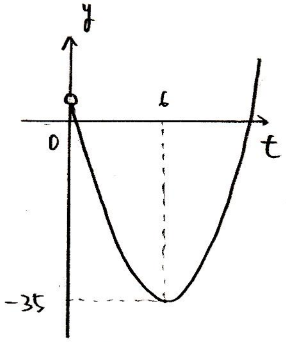
∴

$f(x)=t^2-3\cdot 4t+1$

$=t^2-12t+1$

$=(t-6)^2-36+1$

$=(t-6)^2-35$



よって $f(x)$ は $t=6$ の時最小で，最大値はない

$t=2^x$ より，$2^x=6$ ∴ $x=\log_2 6$ の時

以上より　最小値 -35 $(x=\log_2 6)$　10

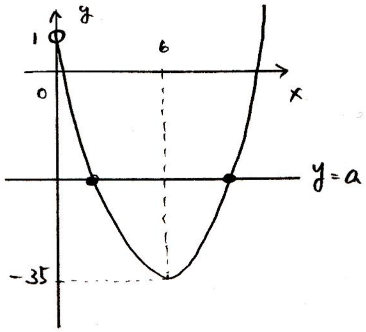
(2) 方程式 $f(x)=a$ が異なる2個の実数解を持つように，定数 a の値の範囲を求めよ。

$t=2^x$ より，1つの t の値に対して，1つの x の値が対応する。よって方程式 $f(x)=a$ の解の個数は，2曲線

$$\begin{cases} y=t^2-12t+1 & (t>0) \\ y=a \end{cases}$$

の交点の個数に一致する。グラフより

交点の個数が2個となる a の値の範囲は



$-35<a<1$

5

6. 関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$ のグラフを書け。また，漸近線の方程式を求めよ。

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$ は $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを

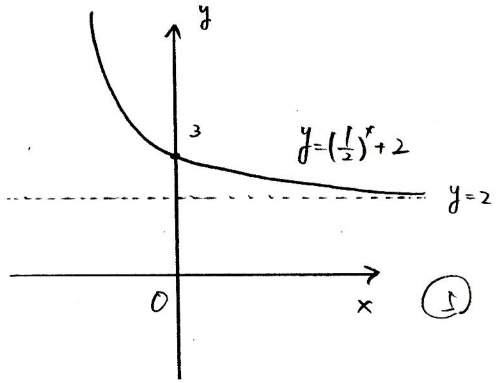
y軸方向に +2 だけ平行移動したもの。

よって，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の漸近線は x軸 より

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$ の漸近線は $y=2$

5

またグラフは下図



5

7. 関数 $f(x)=9^x+9^{-x}-6(3^x+3^{-x})+1$ について，$t=3^x+3^{-x}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 9^x+9^{-x} を t を用いて表せ。

$9^x+9^{-x}=(3^x)^2+(3^{-x})^2$

$=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}$

$=(3^x+3^{-x})^2-2$

$=t^2-2$

5

(2) $t\geqq 2$ であることを示せ。また，等号が成り立つときの x の値を求めよ。

証) $3^x>0$，$3^{-x}>0$ より　（この手の問題で超有名な技法）

相加・相乗平均の関係より

$3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}$

すなわち

$t\geqq 2$

が成り立つ。

また等号は

$3^x=3^{-x}$

つまり

$x=-x$

より

$x=0$

の時成り立つ。

10

(3) 関数 $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(1).(2) より

$f(x)=(t^2-2)-6t+1$

$=t^2-6t-1$ $(t\geqq 2)$

10

∴ 平方完成して

$f(x)=(t-3)^2-10$

より，$t=3$ の時 $f(x)$ は最小値 -10 をとる。

$t=3^x+3^{-x}$ より $t=3$ となる x は

$3^x+3^{-x}=3$

∴

$3^x+\frac{1}{3^x}=3$

$3^x=u$ とおくと

$u+\frac{1}{u}=3$ $)\times u$

$u^2+1=3u$

より $u^2-3u+1=0$

解の公式より

$u=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

よって

$3^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ から

$x=\log_3\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

以上より

最小値 -10 $\left(x=\log_3\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$