数学演習（指数関数）　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の計算をせよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $4^5\times2^{-8}\div8^{-2}$　(2) $(a^{-1})^3\times a^7\div a^2$　(3) $(a^2b^{-1})^3\div(ab^{-2})^2$

(4) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{81}$　(5) $\sqrt[3]{5}\div\sqrt[12]{5}\times\sqrt[8]{25}$

(6) $\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{-2}+\sqrt[3]{54}$　(7) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}}\times\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$

2．次の計算をせよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $a^4\times(a^3)^{-2}$　(2) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt{8}\times\sqrt[4]{32}$　(3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}\times\sqrt{16}\div\sqrt[3]{8}$

(4) $\left\{\left(\dfrac{81}{25}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$　(5) $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

(6) $(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

3．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=9^x-6\cdot3^x+10$　(2) $y=4^x-2^{x+2}$ $(-1\leqq x\leqq3)$

4．次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $3^{x+2}=27$　(2) $4^x-2^{x+2}-32=0$　(3) $\begin{cases}3^{2x}-3^y=-6\\3^{2x+y}=27\end{cases}$

5．次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}<\frac{1}{32}$　　(2) $2\cdot4^x-17\cdot2^x+8<0$　　(3) $25^x-3\cdot5^x-10\geqq0$

6．(1) $x>0$，$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，次 の値を求めよ。

（ア） $x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}$　　（イ） $x+x^{-1}$

(2) $a>0$，$x>0$，$a^x+a^{-x}=5$ のとき，次の値を求めよ。

（ア） $a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}$　　（イ） $a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}$

7．次の各組の数の大小を比較せよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}}$，$4^{\frac{1}{4}}$，$8^{\frac{1}{8}}$　　(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$，$\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sqrt[4]{\frac{1}{125}}$　　(3) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{6}$

8．次の関数のグラフをかけ。また，関数 $y=2^x$ のグラフとの位置関係を調べよ。

(1) $y=-2^x$　　(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

9．次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=2^{x+1}$　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$　　(3) $y=3^x-1$

数学演習（指数関数）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1．次の計算をせよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $4^5\times 2^{-8}\div 8^{-2}$　(2) $(a^{-1})^3\times a^7\div a^2$　(3) $(a^2b^{-1})^3\div(ab^{-2})^2$

(4) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{81}$　(5) $\sqrt[3]{5}\div\sqrt[12]{5}\times\sqrt[8]{25}$

(6) $\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{-2}+\sqrt[3]{54}$　(7) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}}\times\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$

解答　(1) 256　(2) a^2　(3) a^4b　(4) 9　(5) $\sqrt{5}$　(6) 0　(7) a

(1) (与式)$=(2^2)^5\times 2^{-8}\div(2^3)^{-2}=2^{10}\times 2^{-8}\div 2^{-6}=2^{10+(-8)-(-6)}=2^8=256$

(2) (与式)$=a^{-3}\times a^7\div a^2=a^{-3+7-2}=a^2$

(3) (与式)$=a^{2\times 3}b^{(-1)\times 3}\div\{a^{1\times 2}b^{(-2)\times 2}\}=a^6b^{-3}\div a^2b^{-4}=a^{6-2}b^{-3-(-4)}=a^4b$

(4) (与式)$=(3^2)^{\frac{1}{3}}\times(3^4)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=3^2=9$

別解　(与式)$=\sqrt[3]{9\cdot 81}=\sqrt[3]{3^2\cdot 3^4}=\sqrt[3]{3^{2+4}}=\sqrt[3]{3^6}=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9$

(5) (与式)$=5^{\frac{1}{3}}\div 5^{\frac{1}{12}}\times(5^2)^{\frac{1}{8}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

(6) (与式)$=-\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{54}=-\sqrt[3]{2^3\cdot 2}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3^3\cdot 2}$

$=-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=(-2-1+3)\sqrt[3]{2}=0$

(7) (与式)$=a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a^1b^0=a$

2．次の計算をせよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $a^4\times(a^3)^{-2}$　(2) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt{8}\times\sqrt[4]{32}$　(3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}\times\sqrt{16}\div\sqrt[3]{8}$

(4) $\left\{\left(\dfrac{81}{25}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$　(5) $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

(6) $(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

解答　(1) a^{-2}　(2) $\sqrt[12]{32}$　(3) 4　(4) $\dfrac{5}{9}$　(5) $a-b$　(6) $a-b$

(1) (与式)$=a^4\times a^{-6}=a^{4-6}=a^{-2}$

(2) (与式)$=4^{\frac{1}{3}}\div 8^{\frac{1}{2}}\times 32^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times(2^3)^{-\frac{1}{2}}\times(2^5)^{\frac{1}{4}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{5}{4}}=2^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}=2^{\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{2^5}=\sqrt[12]{32}$

(3) (与式)$=\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times 16^{\frac{1}{2}}\div 8^{\frac{1}{3}}=\left\{(2^6)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{-\frac{1}{3}}$

$=2\times 2^2\times 2^{-1}=2^{1+2-1}=2^2=4$

(4) (与式)$=\left\{(3^4\times 5^{-2})^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}=(3^4\times 5^{-2})^{-\frac{1}{2}}=3^{-2}\times 5=\dfrac{5}{9}$

(5) (与式)$=\left\{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right\}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=a-b$

(6) (与式)$=\left\{\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{6}}\right)^2\right\}\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3=a-b$

3．次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=9^x-6\cdot 3^x+10$　(2) $y=4^x-2^{x+2}$ $(-1\leqq x\leqq 3)$

解答　(1) $x=1$ のとき最小値 1，最大値はない

(2) $x=3$ のとき最大値 32，$x=1$ のとき最小値 -4

(1) $3^x=X$ とおくと　$X>0$ ……①

与えられた関数の式を変形すると

$y=3^{2x}-6\cdot 3^x+10=(3^x)^2-6\cdot 3^x+10$

y を X で表すと　$y=X^2-6X+10=(X-3)^2+1$

よって，① の範囲において，y は

$X=3$ で最小値 1 をとる。最大値はない。

また　$X=3$ のとき　$x=1$

ゆえに，$x=1$ で最小値 1，最大値はない。

(2) $2^x=X$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 3$ のとき

$2^{-1}\leqq X\leqq 2^3$　よって　$\dfrac{1}{2}\leqq X\leqq 8$ ……①

与えられた関数の式を変形すると

$y=2^{2x}-2^{x+2}=(2^x)^2-4\cdot 2^x$

y を X で表すと　$y=X^2-4X=(X-2)^2-4$

ゆえに，① の範囲において，y は

$X=8$ で最大値 32，$X=2$ で最小値 -4 をとる。

また　$X=8$ のとき　$x=3$，$X=2$ のとき　$x=1$

よって，$x=3$ で最大値 32，$x=1$ で最小値 -4 をとる。

4．次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $3^{x+2}=27$　(2) $4^x-2^{x+2}-32=0$　(3) $\begin{cases}3^{2x}-3^y=-6\\3^{2x+y}=27\end{cases}$

解答　(1) $x=1$　(2) $x=3$　(3) $x=\dfrac{1}{2}$，$y=2$

(1) $3^{x+2}=27$ から　$3^{x+2}=3^3$

よって　$x+2=3$　ゆえに　$x=1$

(2) 与式から　$(2^x)^2-2^2\cdot 2^x-32=0$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$　方程式は　$X^2-4X-32=0$

ゆえに　$(X+4)(X-8)=0$　よって　$X=-4,\ 8$

$X>0$ であるから　$X=8$　すなわち　$2^x=8$

したがって　$x=3$

(3) $3^{2x}=X$，$3^y=Y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$

連立方程式は　$\begin{cases}X-Y=-6 & \cdots\cdots ①\\XY=27 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$Y=X+6$ ……③

③ を ② に代入して　$X(X+6)=27$

ゆえに　$X^2+6x-27=0$　よって　$(X-3)(X+9)=0$

$X>0$ であるから　$X=3$

これを ③ に代入して　$Y=9$ （$Y>0$ を満たす）

$X=3$ から　$3^{2x}=3$，　$Y=9$ から　$3^y=9$

したがって　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=2$

5．次の不等式を解け。

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}<\dfrac{1}{32}$　(2) $2\cdot 4^x-17\cdot 2^x+8<0$　(3) $25^x-3\cdot 5^x-10\geqq 0$

解答　(1) $x>6$　(2) $-1<x<3$　(3) $x\geqq 1$

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}<\dfrac{1}{32}$ から　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x-1>5$　すなわち　$x>6$

(2) 与式から　$2\cdot(2^x)^2-17\cdot 2^x+8<0$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$

不等式は　$2X^2-17X+8<0$

したがって　$(2X-1)(X-8)<0$

これを解いて　$\dfrac{1}{2}<X<8$ （$X>0$ を満たす）

ゆえに　$\dfrac{1}{2}<2^x<8$　すなわち　$2^{-1}<2^x<2^3$

底 2 は 1 より大きいから　$-1<x<3$

(3) 与式から　$(5^x)^2-3\cdot 5^x-10\geqq 0$

$5^x=X$ とおくと　$X>0$

不等式は　$X^2-3X-10\geqq 0$

したがって　$(X+2)(X-5)\geqq 0$

$X+2>0$ であるから　$X-5\geqq 0$　すなわち　$X\geqq 5$

ゆえに　$5^x\geqq 5$　底 5 は 1 より大きいから　$x\geqq 1$

6．(1)　$x>0$，$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，次 の値を求めよ。

（ア）　$x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}$　　　　（イ）　$x+x^{-1}$

(2)　$a>0$，$x>0$，$a^x+a^{-x}=5$ のとき，次の値を求めよ。

（ア）　$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}$　　　　（イ）　$a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}$

解答　(1)　（ア）　18　　（イ）　47　　(2)　（ア）　$\sqrt{7}$　　（イ）　$4\sqrt{7}$

(1)　（ア）　$x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^3-3x^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)$

$=3^3-3\cdot1\cdot3=18$

（イ）　$x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

ここで　　$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-2x^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}=3^2-2\cdot1=7$

よって　　$x+x^{-1}=7^2-2\cdot1=47$

(2)　（ア）　$\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^2=a^x+2a^{\frac{1}{2}x}a^{-\frac{1}{2}x}+a^{-x}=5+2\cdot1=7$

$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}>0$ であるから　　$a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}=\sqrt{7}$

（イ）　（ア）の結果から

$a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{3}{2}x}=\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)^3-3a^{\frac{1}{2}x}a^{-\frac{1}{2}x}\left(a^{\frac{1}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)$

$=(\sqrt{7})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

7．次の各組の数の大小を比較せよ。

(1)　$2^{\frac{1}{2}}$，$4^{\frac{1}{4}}$，$8^{\frac{1}{8}}$　　　(2)　$\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$，$\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sqrt[4]{\frac{1}{125}}$　　　(3)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{6}$

解答　(1)　$8^{\frac{1}{8}}<2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$　　(2)　$\sqrt[4]{\frac{1}{125}}<\sqrt[3]{\frac{1}{25}}<\frac{1}{\sqrt{5}}$　　(3)　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(1)　$2^{\frac{1}{2}}$，$4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$，$8^{\frac{1}{8}}=(2^3)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{3}{8}}$

底 2 は 1 より大きいから，$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>\frac{3}{8}$ より　　$8^{\frac{1}{8}}<2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$

(2)　$\sqrt[3]{\frac{1}{25}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[4]{\frac{1}{125}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

底 $\frac{1}{5}$ は 1 より小さいから，$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ より

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$　すなわち　$\sqrt[4]{\frac{1}{125}}<\sqrt[3]{\frac{1}{25}}<\frac{1}{\sqrt{5}}$

(3)　$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$，$(\sqrt[6]{6})^6=6$

$6<8<9$ であるから　　$(\sqrt[6]{6})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$

$\sqrt[6]{6}>0$，$\sqrt{2}>0$，$\sqrt[3]{3}>0$ であるから　　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

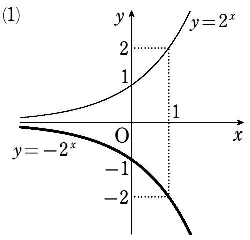
8．次の関数のグラフをかけ。また，関数 $y=2^x$ のグラフとの位置関係を調べよ。

(1)　$y=-2^x$　　　　(2)　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

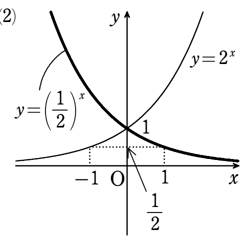
解答　(1)　〔図〕　x 軸に関して対称

(2)　〔図〕　y 軸に関して対称

(1)



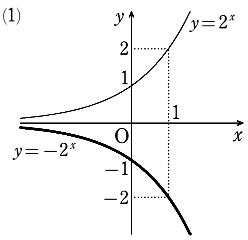
(2)



(1)　グラフは図のようになる。

また，このグラフは，関数 $y=2^x$ のグラフと x 軸に関して対称である。

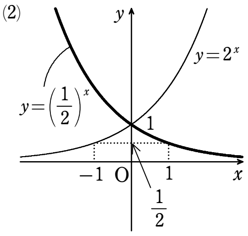
(1)



(2)　グラフは図のようになる。

また，このグラフは，関数 $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である。

(2)

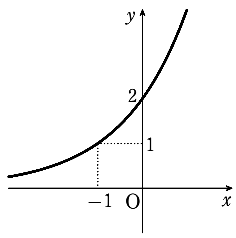


9．次の関数のグラフをかけ。

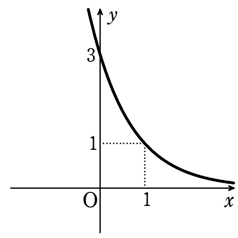
(1)　$y=2^{x+1}$　　　(2)　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$　　　(3)　$y=3^x-1$

解答　(1)〜(3)　〔図〕

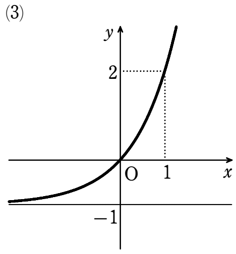
(1)



(2)



(3)

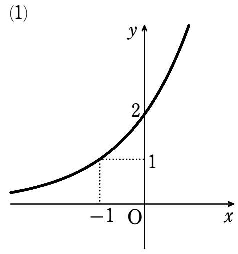


(1)　求めるグラフは，$y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。

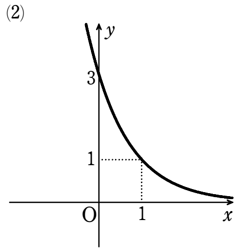
(2)　求めるグラフは，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。

(3)　求めるグラフは，$y=3^x$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。

(1)



(2)



(3)