統一テスト（指数関数）　Ｈ２０．１１．２７　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1. 次の数を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$　　(2) $81^{-\frac{5}{4}}$

2. 次の式を簡単にせよ。

(1) $(a^{-1})^3 \div (a^{-2})^2$

(2) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[8]{25} \div \sqrt[12]{5}$

(3) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}\right)$

(4) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{16}$

3. 次の３つの数の大小関係を不等号を用いて表せ。

(1) 0.5 , $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{2}$

(2) 2^{30} , 3^{20} , 10^{10}

4. $a>0$とする。$a^x - a^{-x} = 1$のとき，以下の値を求めよ。

(1) $a^{2x} + a^{-2x}$

(2) $a^x + a^{-x}$

5. 次の方程式･不等式を解け。

(1) $4^x = 32$

(2) $5^{2x+1} < 5\sqrt{5}$

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1} \leqq \dfrac{1}{81^x}$

(4) $9^x - 8\cdot 3^{x+1} - 81 = 0$

(5) $4^x - 3\cdot 2^x + 2 < 0$

6. 関数 $y = 4^x - 2^{x+3} + 13$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t = 2^x$ とおくことにより，y を t のみで表せ。

(2) y の最小値とそのときのxの値を求めよ。

統一テスト（指数関数）　Ｈ２０．１１．２７　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ ）

1. 次の数を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

$= \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{1}{2}$

⑤

(2) $81^{-\frac{5}{4}}$

$= (3^4)^{-\frac{5}{4}}$

$= 3^{-5} = \frac{1}{243}$

⑤

2. 次の式を簡単にせよ。

(1) $(a^{-1})^3 \div (a^{-2})^2$

$= a^{-3} \div a^{-4}$

$= a^{-3} \times a^4 = a$ ⑤

(2) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[8]{25}\div\sqrt[12]{5}$

$= 5^{\frac{1}{3}}\times(5^2)^{\frac{1}{8}}\div 5^{\frac{1}{12}}$

$= 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ ⑤

(3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)$

$= (a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{-\frac{1}{3}})^3$

$= a - b^{-1} = a-\frac{1}{b}$ ⑤

(4) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{-2}-\sqrt[3]{16}$

$= \sqrt[3]{27\cdot 2}+\sqrt[3]{(-1)^3\cdot 2}-\sqrt[3]{8\cdot 2}$

$= \sqrt[3]{3^3\cdot 2}+\sqrt[3]{(-1)^3\cdot 2}-\sqrt[3]{2^3\cdot 2}$

$= 3\sqrt[3]{2}+(-1)\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}$

$= (3-1-2)\sqrt[3]{2}$

$= 0$

⑤

3. 次の３つの数の大小関係を不等号を用いて表せ。

(1) 0.5，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt{2}$

$0.5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$\sqrt[3]{4} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$-1 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ で

底が1より大きいので

$2^{-1} < 2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}}$

∴ $0.5 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$

⑤

(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$

$3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$

で $8 < 9 < 10$

より $8^{10} < 9^{10} < 10^{10}$

∴ $2^{30} < 3^{20} < 10^{10}$ ⑤

4. $a>0$とする。$a^x-a^{-x}=1$のとき，以下の値を求めよ。

(1) $a^{2x}+a^{-2x}$

$(a^x-a^{-x})^2 = a^{2x}+a^{-2x}-2\cdot a^x\cdot a^{-x} = 1^2$

∴ $a^{2x}+a^{-2x} = 3$ ⑤

(2) a^x+a^{-x}

$(a^x+a^{-x})^2 = a^{2x}+2\cdot a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x}$

$= (a^{2x}+a^{-2x})+2 = 3+2 = 5$

$a^x+a^{-x} > 0$ より $a^x+a^{-x} = \sqrt{5}$ ⑤

5. 次の方程式·不等式を解け。

(1) $4^x=32$

$2^{2x} = 2^5$

∴ $x = \frac{5}{2}$ ⑤

(2) $5^{2x+1}<5\sqrt{5}$

$5^{2x+1} < 5\cdot 5^{\frac{1}{2}}$

∴ $5^{2x+1} < 5^{\frac{3}{2}}$

底5は1より大きいので

$2x+1 < \frac{3}{2}$

∴ $x < \frac{1}{4}$ ⑤

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\leqq\frac{1}{81^x}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leqq \left(\frac{1}{81}\right)^x$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$

底$\frac{1}{3}$は1より小さいので

$2x+1 \geqq 4x$

∴ $x \leqq \frac{1}{2}$

⑤

(4) $9^x-8\cdot 3^{x+1}-81=0$

$t = 3^x$ とおくと

$9^x = (3^x)^2 = t^2$

$3^{x+1} = 3\cdot 3^x = 3t$

∴ $t^2-8\cdot 3t-81 = 0$

$t^2-24t-81 = 0$

∴ $(t-27)(t+3) = 0$

よって $t = 27, -3$

$t>0$ より $t = 27$

∴ $3^x = 27$ より

$x = 3$

⑩

(5) $4^x-3\cdot 2^x+2<0$

$t = 2^x$ とおくと，$4^x = (2^x)^2 = t^2$

∴ $t^2-3t+2 < 0$

$(t-1)(t-2) < 0$

∴ $1 < t < 2$

よって $1 < 2^x < 2$

底2は1より大きいので

$2^0 < 2^x < 2^1$

より

$0 < x < 1$

⑩

6. 関数 $y=4^x-2^{x+3}+13$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t=2^x$ とおくことにより，yをtのみで表せ。

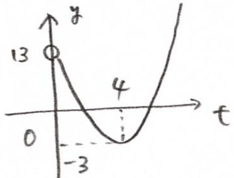
$y = (2^x)^2-2^3\cdot 2^x+13$

$= t^2-8t+13$ ⑤

(2) yの最小値とそのときのxの値を求めよ。

$y = (t-4)^2-3$

ここで $t>0$ より



最小値 -3 $(t=4)$

ここで $t=2^x$ より

$2^x = 4$

∴ $x = 2$

以上より

最小値 -3

$(x=2)$ ⑩

（各5点）